АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

ТОМ IV
ВЫПУСК
4

U. of ILL. LIBRARY
JUL 20 1971
CHICAGO CIRCLE

1959
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1959

СОСТАВ РЕДКОЛЛЕГИИ:

Бернштейн С. Н.*, *Гнеденко Б. В.*, *Золотарев В. М. (ответственный секретарь), ***Колмогоров А. Н.*** (главный редактор), ***Королюк В. С.*, *Линник Ю. В.*, *Прохоров Ю. В.*** (зам. главного редактора), ***Сарымсаков Т. А.*, *Смирнов Н. В.*, *Хинчин А. Я.***

СОДЕРЖАНИЕ

Королюк В. С. Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли 369
Koroljuk V. S. Asymptotical Analysis of Maximum Deviation Distributions in the Bernoulli Scheme 397
Pakshirajan R. P. On the Maximum Partial Sums of Sequences of Independent Random Variables 398
Пакширайан Р. П. О максимальных частичных суммах последовательностей независимых случайных величин 404
Chiang Tse-pei. On the Estimation of Regression Coefficients of a Continuous Parameter Time Series with a Stationary Residual 405
Цзян Цзе-пей. Оценка коэффициентов регрессии в случае непрерывных временных рядов со стационарными остатками 423

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Герценштейн М. Е., Васильев В. Б. Волноводы со случайными неоднородностями и броуновское движение в плоскости Лобачевского 424
Gerzenshtein M. E., Vasiljev V. B. Waveguide with the Random Nonhomogeneities and Brownian Motion on the Lobachevsky's Plane 432
Карпелевич Ф. И., Тутубалин В. Н., Шур М. Г. Предельные теоремы для композиций распределений в плоскости и пространстве Лобачевского . . 432
Karpelevich F. I., Tutubalin V. N., Shour M. G. Limit Theorems for the Compositions of Distributions in the Lobachevsky's Plane and Space . . . 436
Беляев Ю. К. Аналитические случайные процессы 437
Beljaev Yu. K. Analytical Random Processes 444
Бабкин В. И., Беляев П. Ф., Максимов Ю. И. Некоторые замечания к работе В. Л. Гончарова «Из области комбинаторики» 445
Babkin V. I., Beljaev P. F., Maksimov Yu. I. Some Remarks on Goncharov's Paper «From the Domain of C 450
Виленкин С. Я. Об оценке среднег 51
Vilenkin S. Ya. On the Estima 53
Ибрагимов И. А., Чернин К. Е. О 53
Ibragimov I. A., Cernin K. E. 56
Романовский И. В. Об одной тео 56
Romanovsky I. V. On One Theo 58
Ли Хен Вон. К теории оптимальн них шумов 58
Li Heng Won. On the Theory fo of Internal Random Noise 64
Розанов Ю. А. К экстраполяции об 65
Rozanov Yu. A. On Extrapolati 71
Резюме докладов, сделанных на за стей Московского университе 2
Summary of Papers Presented at nar, Moscow University (Feb 2

Адрес редакции: Москва, В

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том IV Выпуск 4
1959

ЧИТ. ЗАЛ

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МАКСИМАЛЬНЫХ УКЛОНЕНИЙ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ

В. С. КОРОЛЮК

В настоящем обзоре излагаются методы построения асимптотических разложений для распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли и в предельной для нее пуассоновской схеме. В первой части (§1—3) подробно обсуждаются возможности построения явных выражений для распределений максимальных уклонений и результаты асимптотического анализа этих выражений. Во второй части (§ 4—7) при построении асимптотических разложений для распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли исходным является разностное уравнение, которому удовлетворяет искомое распределение. Асимптотический анализ решений этого уравнения осуществляется методом последовательного исчерпывания невязок, которые возникают при замене точного уравнения предельным. Рассмотрение в дальнейшем лишь простейшей схемы—схемы Бернулли объясняется стремлением получить максимально обозримые результаты. Возможности асимптотического анализа излагаемым методом, конечно, шире.

Асимптотический анализ в задачах теории вероятностей с успехом проводится методом перевала, который является весьма эффективным методом получения асимптотических оценок. Результаты асимптотических оценок распределений методом перевала столь обширны, что они могут служить предметом отдельного обзора.

Введение

Одной из важных задач в теории вероятностей является задача построения оценок погрешностей, которые возникают при замене точных распределений предельными. Уточнение предельных теорем для функций распределения сумм независимых случайных величин, сходящихся к нормальному закону, было начато еще П. Л. Чебышевым [1], а затем развито и строго обосновано в работах Г. Крамера [2] и С. Эссеена [3]. Сущность метода состоит в изучении близости функций распределения по близости их характеристических функций. Большинство дальнейших работ по асимптотическому анализу функций распределения примыкает к кругу идей, развитых в указанных работах.

Асимптотический анализ распределений функционалов от сумм случайных величин лишь только начат. Большой успех достигнут в получении асимптотических оценок из явных выражений функций распределения условных веро-

59
100-495

ятностей максимальных уклонений в схеме Бернулли и в пуассоновской схеме. Внимание к этим распределениям было привлечено работами А. Н. Колмогорова [4] и Н. В. Смирнова [5], посвященными изучению распределений максимальных уклонений между теоретической и эмпирической и между двумя эмпирическими функциями распределения. Введенные А. Н. Колмогоровым и Н. В. Смирновым распределения максимальных уклонений между распределением $F(t)$ и эмпирической функцией $F_N(t)$ ряда N независимых наблюдений

$$\mathrm{K}_N(z) = \mathbf{P}\left\{\sqrt{N} \sup_{-\infty < t < +\infty} |F_N(t) - F(t)| < z\right\} \tag{0.1}$$

и

$$\mathrm{K}_N^+(z) = \mathbf{P}\left\{\sqrt{N} \sup_{-\infty < t < +\infty} [F_N(t) - F(t)] < z\right\}, \tag{0.2}$$

а также распределения максимальных уклонений между двумя эмпирическими кривыми распределения

$$\mathbf{S}_{n,m}(z) = \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_{-\infty < t < +\infty} |F_m(t) - F_n(t)| < z\right\}, \tag{0.3}$$

$$\mathbf{S}_{n,m}^+(z) = \mathbf{P}\left\{\sqrt{\frac{nm}{n+m}} \sup_{-\infty < t < +\infty} [F_m(t) - F_n(t)] < z\right\}, \tag{0.4}$$

и доказанные ими предельные теоремы служили предметом многочисленных исследований советских и зарубежных математиков. Как указал еще А.Н. Колмогоров [4] (см. также [19]) распределения (0.1) — (0.4) можно рассматривать как условные распределения вероятностей максимальных уклонений в соответствующей пуассоновской схеме и в схеме Бернулли. А именно, пусть ζ_t — процесс Пуассона,

$$\mathbf{P}\{\zeta_t = r\} = \frac{t^r}{r!} e^{-t}, \quad r = 0, 1, 2, \ldots$$

Введем случайные величины

$$\eta_N^+ = \max_{0 \leqslant t \leqslant N} \frac{\zeta_t - t}{\sqrt{N}}, \qquad \eta_N^- = -\min_{0 \leqslant t \leqslant N} \frac{\zeta_t - t}{\sqrt{N}}, \quad \eta_N = \max_{0 \leqslant t \leqslant N} \left|\frac{\zeta_t - t}{\sqrt{N}}\right|,$$

и распределения вероятностей

$$\Pi_N^{\pm}(z \mid x) = \mathbf{P}\{\eta_N^{\pm} < z \mid \zeta_N = x\}, \tag{0.5}$$

$$\Pi_N(z \mid x) = \mathbf{P}\{\eta_N < z \mid \zeta_N = x\}. \tag{0.6}$$

Тогда нетрудно показать, что

$$\mathrm{K}_N(z) = \Pi_N(z \mid N), \quad \mathrm{K}_N^+(z) = \Pi_N^+(z \mid N). \tag{0.7}$$

Рассмотрим независимые случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, которые принимают только два возможных значения: α с вероятностью p и $-\beta$ с вероят-

ностью $q=1-p$ (p может зависеть от N) и нормированы так, что

$$\mathbf{M}\,\xi_k=\alpha p-\beta q=0,\quad \mathbf{D}\,\xi_k=\alpha^2 p+\beta^2 q=\frac{1}{N}. \tag{0.8}$$

Положим

$$s_k=\sum_{r=0}^{k}\xi_r;\quad k=1,\ 2,\ \ldots,N;\quad s_0=0 \tag{0.9}$$

и

$$\sigma_N^+=\max_{0\leqslant k\leqslant N}s_k,\quad \sigma_N^-=-\min_{0\leqslant k\leqslant N}s_k,\quad \sigma_N=\max_{0\leqslant k\leqslant N}|s_k|,$$

и введем распределения

$$\mathrm{B}_N(z\,|\,x)=\mathbf{P}\{\sigma_N<z\,|\,s_N=x\}, \tag{0.10}$$

$$\mathrm{B}_N^{\pm}(z\,|\,x)=\mathbf{P}\{\sigma_N^{\pm}<z\,|\,s_N=x\}. \tag{0.11}$$

Предполагаем, что x определяется соотношениями

$$x=r\alpha-s\beta,\quad r+s=k, \tag{0.12}$$

где s, r и k целые неотрицательные числа; т. е. x и z принимают возможные значения сумм s_k. Тогда можно убедиться, что при условиях

$$n+m=N,\quad p=\frac{m}{N},\quad q=\frac{n}{N}$$

имеют место соотношения

$$\mathrm{S}_{n,\,m}(z)=\mathrm{B}_N(z\,|\,0),\quad \mathrm{S}_{n,\,m}^{+}(z)=\mathrm{B}_N^{+}(z\,|\,0). \tag{0.13}$$

Отметим связь между распределениями максимальных уклонений в схеме Бернулли и в пуассоновской схеме:

$$\lim_{Np\to m}\mathrm{B}_N\left(z\,\middle|\,\frac{c-Np}{\sqrt{Npq}}\right)=\Pi_m(z\,|\,c), \tag{0.14}$$

$$\lim_{Np\to m}\mathrm{B}_N^{\pm}\left(z\,\middle|\,\frac{c-Np}{\sqrt{Npq}}\right)=\Pi_m^{\pm}(z\,|\,c). \tag{0.15}$$

Соотношения (0.14) и (0.15) являются следствиями теоремы Пуассона и одной теоремы Н. Н. Ченцова [39].

Асимптотические оценки явных выражений распределений (0.1), (0.2) и (0.3), (0.4) при $m=n$ имеются в работах Н. В. Смирнова [5], Б. В. Гнеденко [6] и Чжан Ли-цяня [7, 8]. Оценки быстроты сходимости к предельному закону распределения сумм независимых случайных величин, далекие от окончательных, имеются у Чжуна [9] и в более общем случае у Ю. В. Прохорова [10]. Методом перевала асимптотические оценки для вероятности достижения заданного уровня в одной схеме случайного блуждания в связи с задачей из теории ветвящихся случайных процессов получены В. М. Золотаревым [11]. Для вероятности поглощения на n-ом шаге в схеме блуждания с решетчатым распределением вероятностей перехода результаты асимптоти-

ческого анализа методом перевала опубликованы А. А. Боровковым [12].

Для математического ожидания достаточно гладких функций от сумм случайных величин, связанных в цепь Маркова, асимптотические разложения построил И. И. Гихман [13, 14], анализируя уравнение, которым определяется искомое математическое ожидание. В работах автора [15, 16] для распределения максимальных уклонений в схеме Бернулли, которое определяется разностным уравнением, зависящим от параметра N, члены асимптотического разложения определялись рекуррентной системой дифференциальных уравнений*.

Общей идеей асимптотических методов решения уравнений, зависящих от параметра N, является такое расщепление оператора, определяющего уравнение, которое обеспечивает рекуррентный процесс построения для искомого решения $\mathcal{P}_N$ приближенного выражения в виде асимптотического ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_k(N) P_k,$$

который удовлетворяет следующим условиям

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\rho_{k+1}(N)}{\rho_k(N)} = 0; \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mathcal{P}_N - \sum_{k=0}^{n} \rho_k(N) P_k = o[\rho_n(N)] \text{ при } N \to \infty.$$

Последнее соотношение мы будем записывать формулой

$$\mathcal{P}_N \sim \sum_{k=0}^{n} \rho_k(N) P_k.$$

Эффективные методы расщепления операторов в самых разнообразных задачах созданы Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым [41] и развиты их школой. В случае вырождения граничных условий для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных М. И. Вишик и Л. А. Люстерник [42] развили простой и эффективный способ построения асимптотических разложений, показав, что в широком классе задач при вырождении граничных условий возникает явление так называемого пограничного эффекта. В задачах асимптотического анализа распределений максимальных уклонений необходимость построения специальных уравнений, учитывающих эффект перескока через границу, была указана автору А. Н. Колмогоровым.

Окончательные результаты асимптотического анализа распределений (0.1) и (0.2) приведены в § 3, формулы $(I_0) - (I_3)$ и $(II_0) - (II_3)$. Асимптотические разложения распределений (0.3) и (0.4) приведены в § 7, формулы $(III_0) - (III_1)$ и $(IV_0) - (IV_3)$. Там же даны асимптотические оценки распределений (0.5), (0.6) и (0.10), (0.11).

* В этих работах не был учтен эффект перескока через границы, в результате чего в наиболее интересных случаях пропущены некоторые члены разложения.

I. МЕТОД АНАЛИЗА ТОЧНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

§ 1. Случайные блуждания в схеме Бернулли

Для получения явных выражений вероятностей максимальных уклонений в схеме Бернулли используется наглядная схема блужданий, которая часто применяется в теории вероятностей. В излагаемых ниже задачах эта схема применялась Б. В. Гнеденко и его учениками (см. [20] § 16, 61, [21] — [30]), а также в работах ряда зарубежных авторов [31] — [37].

Поведение сумм s_k (см. (0.9)) описывается траекторией в плоскости (t, x) случайной частицы, находящейся в момент $t = 0$ в начале координат и перемещающейся в момент $t = t_1, t_2, \ldots, t_N$ вдоль оси x-ов на α с вероятностью p и на $-\beta$ с вероятностью q. Абсцисса положения частицы на k-ом шаге определяется моментом $t = t_k$ $(k = 0, 1, \ldots, N)$. Путь частицы за N шагов определяется последовательностью точек с координатами (t_k, s_k) $(k = 0, 1, \ldots, N)$. Вероятность фиксированного пути частицы из начала координат в точку (t_N, x) равна $p^r q^{N-r}$, где (см. (0.8) и (0.12))

$$r = Np + x\sqrt{Npq}. \tag{1.1}$$

Число возможных путей в точку (t_N, x) равно $C_N^r = \frac{N!}{r!\,(N-r)!}$. Таким образом получаем, например, при наличии одного поглощающего экрана на границе $x = z$ вероятность

$$B_N^+(z;\ x) = \mathbf{P}\left\{\max_{0 \leqslant k \leqslant N} s_k < z;\quad s_N = x\right\}$$

того, что блуждающая частица, выходя из начала координат, попадает в точку (t_N, x) на N-ом шаге, не пересекая границы $x = z$ определяется равенством

$$B_N^+(z;\ x) = C^+(N,\ x;\ z)\, p^r q^{N-r}, \tag{1.2}$$

где $C^+(N, x; z)$ есть число путей из точки (0.0) в точку (t_N, x), не пересекающих границы $x = z$. Аналогично определяется вероятность

$$B_N(z;\ x) = \mathbf{P}\left\{\sigma_N < z;\quad s_N = x\right\}$$

того, что блуждание частицы на N-ом шаге закончится в точке (t_N, x) при наличии двух поглощающих экранов при $x = z$ и $x = -z$:

$$B_N(z, x) = C(N;\ x;\ z)\, p^r q^{N-r}, \tag{1.3}$$

где $C(N, x; z)$ — число путей из точки (0,0) в точку (t_N, x), не пересекающих границ $x = z$ и $x = -z$.

Числа $C^+(k, x; z)$ и $C(k, x; z)$, $(0 \leqslant k \leqslant N)$ определяются решениями разностного уравнения

$$C(k+1,\ x) = C(k,\ x+\beta) + C(k,\ x-\alpha) \tag{1.4}$$

в условиях

$$\begin{aligned} &C^+(0,\ 0;\ z)=1, \quad C^+(0,\ x;\ z)=0 \text{ при } x\neq 0,\\ &C^+(k,\ x;\ z)=0 \qquad\qquad\qquad \text{при } x\geqslant z, \end{aligned} \tag{1.5}$$

или

$$\begin{aligned} &C(0,0;\ z)=1, \quad C(0,\ x;\ z)=0 \text{ при } x\neq 0,\\ &C(k,\ x;\ z)=0 \qquad\qquad\qquad \text{при } |x|\geqslant z. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Численное решение уравнения (1.4) нетрудно получить, учитывая существование современных цифровых автоматических машин.

К решению уравнения (1.4) при соответствующих граничных условиях могут быть сведены многие задачи, возникающие в связи с испытаниями Бернулли. Так, искомые вероятности максимальных уклонений $B_N(z\,|\,x)$ и $B_N^{\pm}(z\,|\,x)$ (см. (0.10) (0.11)) определяются формулами

$$B_N^+(z\,|\,x)=\frac{C^+(N,\ x;\ z)}{C_N^r} \tag{1.7}$$

и

$$B_N(z\,|\,x)=\frac{C(N,\ x;\ z)}{C_N^r} \tag{1.8}$$

Далее, по формуле полной вероятности имеем

$$B_N^+(z)=\mathbf{P}\{\sigma_N^+<z\}=\sum_{-N\beta\leqslant x<z} C^+(N,\ x;\ z)\,p^r q^{N-r},$$

$$B_N(z)=\mathbf{P}\{\sigma_N<z\}=\sum_{|x|<z} C(N,\ x;\ z)\,p^r q^{N-r}.$$

Наряду с возможностью численного решения рассматриваемых задач естественно поставить вопрос о возможности нахождения явных выражений для искомых распределений, т. е. о возможности определения явных выражений для решений уравнения (1.4). При этом, конечно, желательно получить, по возможности, простые выражения, которые допускали бы аналитическое исследование, и подсчет по которым был бы проще, чем непосредственное численное решение уравнения (1.4). Однако это удается сделать лишь в немногих случаях, которые мы сейчас и рассмотрим.

Случай $p=q=\frac{1}{2}$. В этих условиях после замены $x\sqrt{N}=y$, $z\sqrt{N}=c$ (y и c — целые числа) уравнение (1.4) превращается в простейшее разностное уравнение второго порядка параболического типа

$$C(k+1,\ y)=C(k,\ y+1)-C(k,\ y-1). \tag{1.9}$$

В условиях (1.5) решение этого уравнения может быть получено методом отражений (см., например, [20] § 61):

$$C^+(k;\ y;\ c)=C_k^{\frac{k+y}{2}}-C_k^{\frac{k-y+2c}{2}}. \tag{1.10}$$

Вероятность $\mathbf{P}_N(c)$ поглощения на N-ом шаге в этом случае равна

$$\mathbf{P}_N(c) = \frac{c}{N} C_{N^2}^{\frac{N-c}{2}} \frac{1}{2^N}. \tag{1.11}$$

Метод отражений дает также решение уравнения (1.9) в условиях (1.6):

$$C(k, y; c) = \sum_s \left\{ C_k^{\frac{k+y}{2}+2cs} - C_k^{\frac{k+y}{2}-(2s+1)c} \right\}. \tag{1.12}$$

Суммирование производится по всем целым s (лишь конечное число слагаемых отлично от нуля).

В частности, таким образом в цитированных в начале этого параграфа работах были получены результаты относительно распределения максимальных уклонений (односторонних и двусторонних) между двумя эмпирическими кривыми распределения при условии равночисленности результатов испытаний в двух выборках.

Случай $p = \nu q$ (ν — целое число). После замены: $x\sqrt{N\nu} = y$, $z\sqrt{N\nu} = c$ (y и c — целые числа) уравнение (1.4) примет вид:

$$C(k+1, y) = C(k, y+\nu) + C(k, y-1). \tag{1.13}$$

Методом отражений может быть получено (см. [29]) выражение для числа путей из точки (0.0) до точки (k, c), не пересекающих границы $y = c$ ($k \equiv c \pmod{(\nu+1)}$), а именно

$$C^+(k-1, c-1; z) = \frac{c}{k} C_k^{\frac{k-c}{\nu+1}}. \tag{1.14}$$

Тогда в условиях (1.5) решение уравнения (1.13) определится равенством

$$C^+(N, y; c) = C_N^{\frac{N-y}{\nu+1}} - \sum_r \frac{c}{r} C_r^{\frac{r-c}{\nu+1}} C_{N-r}^{\frac{N-y}{\nu+1} - \frac{r-c}{\nu+1}}. \tag{1.15}$$

Здесь $N \equiv y \pmod{(\nu+1)}$, суммирование ведется по $r \equiv c \pmod{(\nu+1)}$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в справедливости (1.15). Впрочем, значительно проще воспользоваться геометрической интерпретацией этой задачи и ее решения (см. [29], стр. 84). Вероятностный смысл решение (1.15) примет после умножения на $p^{\frac{N-y}{\nu+1}} q^{N-\frac{N-y}{\nu+1}}$ или деления на $C_N^{\frac{N-y}{\nu+1}}$. Существенно усложняется вид решения уравнения (1.13) в условиях (1.6). Решение в этом случае изложено в [29]. Очевидно, что таким же образом может быть получено решение уравнения (1.4) в случае несимметричных границ поглощения. Точные формулы в форме, отличной от [29], для этого случая приведены в работах Блекмана [33, 34] и Кемпермана [35]. Из работы Чжан Ли-цяня [8] следует, что полученное в [29] решение можно упростить так, что оно станет доступным асимптотическому анализу.

Нам кажется, что в общем случае явные выражения для решений уравнения (1.4) не будут иметь преимуществ по сравнению с существующим

простым численным методом его решения. Возникает задача построения простых оценок решений (1.4). Для вероятности односторонних уклонений при условии, что $m - n$ мало, Ходжес (36) получил достаточно простые оценки, допускающие асимптотический анализ.

§ 2. Максимальные уклонения в пуассоновском процессе

Явные выражения для распределений максимальных уклонений в пуассоновском процессе могут быть получены из явных выражений для распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли при $p = \nu q$ (ν — целое число) предельным переходом по $\nu \to \infty$ при условии, что $Np \to m$ (m — параметр пуассоновского процесса; см. (0.14), (0.15)). Так были получены распределения $K_N^+(z)$ и $K_N(z)$ (см. (0.7)) в [29], [33] — [35]. Очевидно, что таким же способом можно получить распределения максимальных уклонений в пуассоновском процессе и в других случаях. Однако представляет интерес непосредственный вывод явных выражений для рассматриваемых распределений. Выражение для $K_N^+(z)$ было непосредственно найдено Н. В. Смирновым [5]. Выражение для $K_N(z)$ в более простой форме, чем в [29], определил Чжан-Ли-цянь [8]. Мы ограничимся здесь лишь кратким изложением сути метода. Примененный Чжан-Ли-цянем метод в основном намечен В. Феллером [38]. Существенным дополнением к методу В. Феллера является применение следующих интересных тождеств:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha\,(k+\alpha)^{k-1}\,(n-k-\beta)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \frac{(n+\alpha-\beta)^n}{n!}, \tag{2.1}$$

$$\sum_{r=[\beta]+1} v_r(-\beta)\,\frac{(k-r)^{k-r}}{(k-r)!} = \frac{(k-\beta)^k}{k!}, \tag{2.2}$$

где

$$v_r(-\beta) = \frac{(r-\beta)^r}{r!} - \sum_{s=[\beta]+1}^{r-1} \frac{(s-\beta)^s (r-s)^{r-s-1}}{s!\,(r-s)!}. \tag{2.3}$$

Доказательство этих тождеств основано на использовании соотношения

$$\sum_{l=0}^{r} (-1)^l C_r^l f(l) = (-1)^r [\Delta^r f(x)]_{x=0} = 0,$$

которое имеет место, когда $f(x)$ — многочлен степени, меньшей r.

Приведем, например, доказательство тождества (2.1):

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha\,(k+\alpha)^{k-1}\,(n-k-\beta)^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha\,(k+\alpha)^{k-1}}{k!} \sum_{r=0}^{n-k} \frac{(n+\alpha-\beta)^r\,(-k-\alpha)^{n-k-r}}{r!\,(n-k-r)!} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^{n-r}\,(n+\alpha-\beta)^r}{r!} \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k C_{n-r}^k \frac{\alpha\,(k+\alpha)^{n-r-1}}{(n-r)!} = \frac{(n+\alpha-\beta)^n}{n!}.$$

Для определения $\Pi_m^+(z \mid m)$ (см. (0.5)) заметим, что

$$\Pi_m^+(z \mid m) = 1 - \mathbf{P}\left\{-\tau_m^- \leqslant -z \mid \zeta_m = m\right\}. \tag{2.4}$$

Введем события $A_k (0 \leqslant k \leqslant [m - z\sqrt{m}])$, состоящие в том, что $\zeta_{k+z\sqrt{m}} = k$ при условии $\zeta_m = m$. Легко понять, что

$$\mathbf{P}\{A_k\} = C_m^k \left(\frac{k + z\sqrt{m}}{m}\right)^k \left(1 - \frac{k + z\sqrt{m}}{m}\right)^{m-k}, \tag{2.5}$$

так как событие A_k означает, что из m точек, равномерно распределенных на интервале $(0, m)$, k находятся в интервале $(0, k + z\sqrt{m})$ (см. Дуб [45], стр. 94). Далее

$$\Delta_m(z) = \mathbf{P}\{-\eta_m \leqslant -z \mid \zeta_m = m\} = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=0}^{[m-z\sqrt{m}]} A_k\right\}. \tag{2.6}$$

Так как события A_k $(0 \leqslant k \leqslant [m - z\sqrt{m}])$, вообще говоря, совместимы, то для вычисления $\Delta_m(z)$ построим новую последовательность несовместимых событий

$$U_k = \overline{A}_0 \overline{A}_1 \ldots \overline{A}_{k-1} A_k, \quad (k = 0, 1, \ldots, [m - z\sqrt{m}]).$$

Тогда

$$\Delta_m(z) = \sum_{k=0}^{[m-z\sqrt{m}]} \mathbf{P}\{U_k\}. \tag{2.7}$$

По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\{A_k\} = \sum_{r=0}^{k} \mathbf{P}\{U_r\}\, \mathbf{P}\{A_k \mid A_r\}. \tag{2.8}$$

Но событие $\{A_k \mid A_r\}$ означает, что из m точек, равномерно распределенных в интервале $(0, m)$, из которых r находятся в интервале $(0, r + z\sqrt{m})$, k точек попали в интервал $(0, k + z\sqrt{m})$, или, что то же, из $m - r$ точек, лежащих в интервале $(r + z\sqrt{m}, m)$, $k - r$ находятся в $(r + z\sqrt{m}, k + z\sqrt{m})$. Следовательно

$$\mathbf{P}\{A_k \mid A_r\} = C_{m-r}^{k-r} \left(\frac{k-r}{m - r - z\sqrt{m}}\right)^{k-r} \left(1 - \frac{k-r}{m - r - z\sqrt{m}}\right)^{m-k} \tag{2.9}$$

Подставляя (2.5) и (2.9) в (2.8), получим

$$\frac{(k + z\sqrt{m})^k}{k!} = \sum_{r=0}^{k} \mathbf{P}\{U_r\} \frac{m^m (m-r)!}{m!\,(m - r - z\sqrt{m})^{m-r}} \frac{(k-r)^{k-r}}{(k-r)!}.$$

Применим теперь тождество (2.1) при $n = k$, $\alpha = z\sqrt{m}$, $\beta = 0$:

$$\frac{(k + z\sqrt{m})^k}{k!} = \sum_{r=0}^{k} \frac{z\sqrt{m}\,(r + z\sqrt{m})^{r-1}}{r!} \frac{(k-r)^{k-r}}{(k-r)!}.$$

Из этих соотношений последовательно найдем

$$\mathbf{P}\{U_k\} \frac{m^m (m-k)!}{m!\,(m - k - z\sqrt{m})^{m-k}} = \frac{z\sqrt{m}\,(k + z\sqrt{m})^{k-1}}{k!},$$

откуда

$$\mathbf{P}\{U_k\} = C_m^k \frac{z}{\sqrt{m}} \left(\frac{k + z\sqrt{m}}{m}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{k + z\sqrt{m}}{m}\right)^{m-k}. \tag{2.10}$$

Вспоминая (2.4), (2.6), (2.7), получаем явное выражение для $\Pi_m^+(z \mid m) = \mathrm{K}_m^+(z)$:

$$\mathrm{K}_m^+(z) = 1 - \sum_{k=0}^{[m - z\sqrt{m}]} C_m^k \frac{z}{\sqrt{m}} \left(\frac{k}{m} + \frac{z}{\sqrt{m}}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{k}{m} - \frac{z}{\sqrt{m}}\right)^{m-k}. \tag{2.11}$$

Обратим внимание: событие U_k означает, что процесс ζ_t $(0 \leqslant t \leqslant m)$ впервые пересечет прямую $\zeta = t - z\sqrt{m}$ при $\zeta_t = k$. Введем аналогичные события V_k, $[z\sqrt{m}] < k \leqslant m$, которые означают, что процесс ζ_t впервые пересечет прямую $\zeta = t + z\sqrt{m}$ при $\zeta_t = k$. Тогда легко сообразить, что

$$\mathbf{P}\{\eta_m^+ \geqslant z \mid \zeta_m = m\} = \sum_{k=[z\sqrt{m}]+1}^{m} \mathbf{P}\{V_k\}. \tag{2.12}$$

Вероятности событий V_k определим из рекуррентной системы уравнений

$$\mathbf{P}\{B_k\} = \sum_{r=[z\sqrt{m}]+1}^{k} \mathbf{P}\{V_r\}\,\mathbf{P}\{B_k \mid B_r\}, \tag{2.13}$$

где события B_k означают, что процесс ζ_t пересекает прямую $\zeta = t + z\sqrt{m}$ при $\zeta_t = k$ (не обязательно впервые), т. е. что в интервале $(0,\ k - z\sqrt{m})$ находится ровно k точек из всех m точек интервала $(0,\ m)$. Следовательно

$$\mathbf{P}\{B_k\} = C_m^k \left(\frac{k - z\sqrt{m}}{m}\right)^k \left(1 - \frac{k - z\sqrt{m}}{m}\right)^{m-k}. \tag{2.14}$$

Событие $\{B_k \mid B_r\}$ означает, что из $m - r$ точек, лежащих в интервале $(0,\ r - z\sqrt{m})$, $k - r$ точек находится в $(r - z\sqrt{m},\ k - z\sqrt{m})$. Следовательно

$$\mathbf{P}\{B_k \mid B_r\} = C_{m-r}^{k-r} \left(\frac{k - r}{m - r + z\sqrt{m}}\right)^{k-r} \left(1 - \frac{k - r}{m - r + z\sqrt{m}}\right)^{m-k}. \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15) и (2.14) в (2.13), получим

$$\frac{(k - z\sqrt{m})^k}{k!} = \sum_{r=[z\sqrt{m}]+1}^{k} \mathbf{P}\{V_k\} \frac{m^m (m - r)!}{m!\,(m - r + z\sqrt{m})^{m-r}} \frac{(k - r)^{k-r}}{(k - r)!}. \tag{2.16}$$

Используя тождество (2.2), находим

$$\mathbf{P}\{V_k\} = v_k(-z\sqrt{m}) \frac{m!\,(m - k + z\sqrt{m})^{m-k}}{m^m\,(m - k)!}. \tag{2.17}$$

Наличие формул для вероятностей событий $U_k(0 \leqslant k \leqslant [m - z\sqrt{m}])$ и V_k $([z\sqrt{m}] < k \leqslant m)$ позволяет построить явное выражение для $\Pi_m(z \mid m) = K_m(z)$ (см. [29] и [8]).

§ 3. Асимптотические оценки явных выражений

Асимптотические оценки точных выражений, полученных в рассматриваемых задачах, основаны на использовании формулы Стирлинга (см. [43])

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + \frac{1}{2} \ln 2\pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k k!\, B_{k+1}}{n^{k+1}}, \tag{3.1}$$

где числа B_k определяются из соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{e^t + 1}{e^t - 1} - \frac{1}{t} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k t^k, \tag{3.2}$$

и формулы суммирования (см. [43]):

$$\sum_{r=1}^{n}{}' f\left(\frac{r}{n}\right) = n \int_0^1 f(t)\, dt + \sum_{m=1}^{k} \frac{\psi_m(0)}{n^{m-1}} \left\{f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0)\right\} + \\ + \frac{1}{n^{k-1}} \int_0^1 f^{(k)}(t)\, \psi_k\, dt, \tag{3.3}$$

где функции $\psi_m(t)$ определяются условиями:

$$\psi_1(t) = t - [t] + \frac{1}{2},$$

$$\psi_m'(t) = -\psi_{m-1}(t), \quad \int_0^1 \psi_m(t)\, dt = 0, \quad m = 2,3, \ldots \tag{3.4}$$

Во всех рассматриваемых нами задачах аппроксимирующая функция $f(t)$ равна нулю вместе со своими k производными при $t = 0$ и $t = 1$, так что формула (3.3) в наших условиях имеет вид:

$$\frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\, dt + O(n^{-k}). \tag{3.5}$$

Аналитические трудности возникают при обосновании возможности применения этой формулы. Приведем примеры.

1. При $p = q = \frac{1}{2}$, учитывая (1.7) и (1.10) и применяя формулу Стирлинга (3.1), можно получить (см. [12]), что

$$B_N^{+}(z \mid 0) = 1 - e^{-2z^2}\left[1 - \frac{2z^2}{N}\left(1 - \frac{2}{3}z^2\right)\right] + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right).$$

Аналогично могут быть построены асимптотические оценки для $B_N(z \mid x)$ и $B_N(z; x)$.

2. В схеме блужданий пуассоновского процесса асимптотические оценки для распределения $K_m^+(z)$ (см. (2.11)) строятся с использованием формулы (3.5). Аппроксимирующая функция для вероятности $\mathbf{P}\{U_k\}$ (см. (2.10)) при $t = \frac{k}{m}$ с помощью формулы Стирлинга может быть получена, например, в виде (см. [7])

$$f(t) = \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{z^2}{2t(1-t)}}}{t\sqrt{t(1-t)}} \left[1 - \frac{q_1(t)}{\sqrt{m}} + \frac{q_2(t)}{m}\right],$$

где

$$q_1(t) = \frac{z}{t} - \frac{z^3(1-2t)}{3t^2(1-t)^2},$$

$$q_2(t) = \frac{t(1-t)-1}{12t(1-t)} + \frac{z^2}{t^2} - \frac{z^4(1-2t)}{3t^2(1-t)^2} - \frac{z^4(1-3t+3t^2)}{4t^3(1-t)^3} + \frac{z^6(1-2t)^3}{18t^4(1-t)^4}.$$

Интегрирование по t в интервале $(0,1)$ дает члены асимптотического ряда для $K_m^+(z)$. Из точных формул, таким образом, в разложении при $0 < \varepsilon \leqslant z \leqslant O(\sqrt[6]{m})$

$$\overline{K_m^+}(z) \sim \sum_{r=0}^{\infty} m^{-r/2} K_r^+(z) \tag{3.6}$$

Н. В. Смирновым [5а] определены следующие члены:

$$K_0^+(z) = 1 - e^{-2z^2}, \quad K_1^+(z) = \frac{2z}{3} e^{-2z^2}; \tag{I_0, I_1}$$

Н. И. Карплевская определила следующий член

$$K_2^+(z) = \frac{2z^2}{3}\left(1 - \frac{2z^2}{3}\right) e^{-2z^2}; \tag{I_2}$$

Чжан Ли-цянь [7] определил еще один член разложения (3.6)

$$K_3^+(z) = \frac{4z}{9}\left(\frac{1}{5} - \frac{19z^2}{15} + \frac{2z^4}{3}\right) e^{-2z^2}. \tag{I_3}$$

Проведение асимптотических оценок для распределений двусторонних максимальных уклонений требует более громоздких выкладок. В разложении при $0 < \varepsilon \leqslant z \leqslant O(\sqrt[6]{N})$

$$K_N(z) \sim \sum_{r=0}^{\infty} N^{-r/2} K_r(z)$$

предельный член был определен А. Н. Колмогоровым [4]:

$$K_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2}. \tag{II_0}$$

Последующие три члена определил Чжан Ли-цянь [8]:

$$K_1(z) = -\frac{2z}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k k^2 e^{-2k^2z^2}, \qquad (\mathrm{II}_1)$$

$$K_2(z) = -\frac{1}{18}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k [f_1 - 4(f_1+3)k^2z^2 + 8k^4z^4]\, e^{-2k^2z^2}, \qquad (\mathrm{II}_2)$$

$$K_3(z) = \frac{z}{27}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}(-1)^k \left[\frac{f_2}{5} - \frac{4(f_2+45)k^2z^2}{15} + 8k^4z^4\right] e^{-2k^2z^2}, \qquad (\mathrm{II}_3)$$

$$f_1 = k^2 - \sin^2\frac{k\pi}{2}; \quad f_2 = 5k^2 + 22 - 15\sin^2\frac{k\pi}{2}.$$

Существенным недостатком построения асимптотических оценок из точных формул является невозможность избежать повторения всех выкладок при желании уточнить ранее полученные оценки.

II. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ИСЧЕРПЫВАНИЯ НЕВЯЗОК

§ 4. Описание метода

Изложение метода мы проведем на простейшей схеме одномерных случайных блужданий. Различные задачи в дискретной схеме блужданий приводят к решению разностных уравнений с определенными граничными условиями. Таковы, например, задачи о разорении с поглощающими и другими экранами (см. [40], гл. 14). Представляет интерес как определение точных решений, так и асимптотический анализ решений в предположении, что величины изменения положения блуждающей частицы (за один шаг) становятся бесконечно малыми. При этом возникает необходимость учитывать эффект перескока через границы. Мы покажем, что в граничных задачах решения разностных уравнений с малым параметром эффект перескока через границы может быть учтен с помощью решений типа пограничного слоя (см. [42]).

Вероятность $U_\varepsilon(x)$, выходя из точки x, достичь области $x \leqslant 0$, не попадая в область $x \geqslant 1$, удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{P}_\varepsilon[U_\varepsilon(x)] = \sum_{k=-m}^{n} p_k U_\varepsilon(x + k\varepsilon) = 0, \qquad (4.1)$$

в котором числа p_k ($-m \leqslant k \leqslant n$, m и n — целые неотрицательные числа) суть вероятности перехода из точки x в точку $x + k\varepsilon$. Вероятность остаться в точке x для удобства представлена в виде $1 + p_0$ ($p_0 < 0$); так что

$$\sum_{k=-m}^{n} p_k = 0.$$

Вероятность $U_\varepsilon(x)$ определяется следующими граничными условиями:

$$U_\varepsilon(-r\varepsilon) = 1 \qquad \text{при } 0 \leqslant r \leqslant m-1, \qquad (4.2)$$

$$U_\varepsilon(1 + s\varepsilon) = 0 \qquad \text{при } 0 \leqslant s \leqslant n-1. \qquad (4.3)$$

Введем производящую функцию распределения P_ε:

$$p_\varepsilon(\lambda) = \sum_{k=-m}^{n} p_k \lambda^k.$$

Предположим, что математическое ожидание величины скачка равно нулю, т. е.

$$\sum_{k=-m}^{n} k p_k = 0,$$

и что $p_{-m} \neq 0$, $p_n \neq 0$. Таким образом, единица является корнем $p_\varepsilon(\lambda)$ кратности два. Будем считать для простоты, что остальные корни производящей функции попарно различны.

Лемма 1. *Производящая функция*

$$p(\lambda) = \sum_{k=-m}^{n} p_k \lambda^k$$

решетчатого распределения P_ε с максимальным шагом ε, удовлетворяющая условиям

$$p(1) = p'(1) = 0, \quad p_{-m} \neq 0, \quad p_n \neq 0,$$

может быть представлена в виде

$$p(\lambda) = (\lambda - 2 + \lambda^{-1}) q_0(\lambda) q_1(\lambda), \qquad (4.4)$$

где функция $q_0(\lambda)$ — многочлен относительно λ^{-1} — имеет ровно $m-1$ нулей λ_i $(1 \leqslant i \leqslant m-1)$, по модулю меньших единицы, а $q_1(\lambda)$ — многочлен по λ, все $n-1$ корней которого $\overline{\lambda}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ по абсолютной величине больше единицы.

Утверждение леммы является следствием одной теоремы Пелле [47].

Таким образом, общее решение уравнения (4.1) может быть представлено в виде:

$$U_\varepsilon(x) = (A_\varepsilon + B_\varepsilon x) + \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{x/\varepsilon} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j \overline{\lambda}_j^{\frac{x-1}{\varepsilon}}, \qquad (4.5)$$

где для каждого N и при любом $\delta > 0$ равномерно по $x \geqslant \delta$

$$\lambda_i^{x/\varepsilon} = o(\varepsilon^N), \quad (1 \leqslant i \leqslant m-1);$$

и равномерно по $x \leqslant 1 - \delta$

$$\overline{\lambda}_j^{\frac{x-1}{\varepsilon}} = o(\varepsilon^N), \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1).$$

Функция $v(x) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{x/\varepsilon}$ существенно отлична от нуля лишь вблизи точки $x = 0$; ее называют *погранслоем* в точке $x = 0$. Аналогично функция

$$w(x) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j \lambda_j^{\frac{x-1}{\varepsilon}}$$

существенно отлична от нуля лишь вблизи точки $x = 1$, и называется *погранслоем* в точке $x = 1$. Решение $u_\varepsilon(x) = A_\varepsilon + B_\varepsilon x$ уравнения (4.1) будем называть *регулярным решением*.

Нетрудно убедиться, что условия (4.2) и (4.3) однозначно определяют коэффициенты в (4.5), которые являются ограниченными функциями от ε. Итак, решение рассматриваемой задачи представимо в виде:

$$U_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) + v_\varepsilon(x) + w_\varepsilon(x),$$

где $u_\varepsilon(x) = A_\varepsilon + B_\varepsilon x$ есть регулярная часть решения, ограниченная вместе со своими производными, а $v_\varepsilon(x)$ и $w_\varepsilon(x)$ погранслои в точках $x = 0$ и $x = 1$ соответственно.

Задачами асимптотического анализа являются: выделение регулярной части решения и погранслоев, построение рекуррентных процессов представления регулярного решения и погранслоя в виде рядов по степеням малого параметра. При этом построенные асимптотические ряды могут соответствовать как разложениям по ε коэффициентов при частных решениях в (4.5), так и разложениям самих частных решений уравнения (4.1) (нули $p(\lambda)$ могут зависеть от ε). Так как погранслой существенно не влияет на решение внутри рассматриваемой области, то возникает задача построения асимптотических рядов только для регулярной части решения.

Для решения поставленных задач построим расщепление оператора $\mathbf{P}_\varepsilon$ в уравнении (4.1), соответствующее разложению (4.4):

$$\mathbf{P}_\varepsilon = \Delta^2 \cdot Q_0 \cdot Q_1. \tag{4.6}$$

Разностные операторы Δ^2, Q_0 и Q_1 получаются подстановкой в соответствующие множители (4.4) вместо λ оператора C сдвига на ε:

$$C\varphi(x) = \varphi(x + \varepsilon), \quad C^k\varphi(x) = \varphi(x + k\varepsilon), \quad (k \gtrless 0),$$

так что

$$\Delta^2 = C - 2C^0 + C^{-1},$$
$$Q_0 = q_0(C), \quad Q_1 = q_1(C),$$

уравнение

$$\Delta^2[U(x)] = U(x + \varepsilon) - 2U(x) + U(x - \varepsilon) = 0 \tag{4.7}$$

однозначно определяет регулярную часть решения (4.1) при задании граничных условий в точках $x = 0$ и $x = 1$. Невязка, которую создает регулярное решение в выполнении остальных условий (4.2) компенсируется погранслоем $v(x)$ в точке $x = 0$, который определяется уравнением

$$Q_0[v(x)] = 0$$

по значениям в точках $x = -r\varepsilon$, $r = 1, 2, \ldots, m-1$. Невязка регулярного решения в выполнении (4.3) компенсируется погранслоем $w(x)$ в точке $x=1$, который определяется из уравнения

$$Q_1[w(x)] = 0$$

значениями в точках $x = 1 + s\varepsilon$; $s = 1, 2, \ldots, n-1$. Построение асимптотического ряда для решения $U_\varepsilon(x)$ уравнения (4.1) с условиями (4.2) и (4.3) осуществляется следующим рекуррентным процессом.

Воспользуемся обозначениями для разностей

$$\Delta_{+\varepsilon}\varphi(x) = \varphi(x+\varepsilon) - \varphi(x);\ \Delta_{-\varepsilon}\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi(x-\varepsilon);$$
$$\Delta^{r+1}_{\pm\varepsilon}\varphi(x) = \Delta_{\pm\varepsilon}[\Delta^r_{\pm\varepsilon}\varphi(x)]$$

и перепишем граничные условия (4.2) и (4.3) в виде:

$$U_\varepsilon(0) = 1, \quad U_\varepsilon(0) = 0, \tag{4.8}$$

и

$$\Delta^r_{-\varepsilon}U_\varepsilon(0) = 0,\ (1 \leqslant r \leqslant m-1);\ \Delta^s_{+\varepsilon}U_\varepsilon(1) = 0,\ (1 \leqslant s \leqslant n-1). \tag{4.9}$$

Определим нулевое приближение $U_0(x)$ регулярной части решением (4.7) в условиях (4.8). Для компенсации невязки $U_0(x)$ в выполнении дополнительных условий (4.9) введем погранслой $v_0(x)$ в точке $x=0$ так, чтобы $u_0(x) + \varepsilon v_0(x)$ удовлетворяла условиям (4.9) в точке $x=0$, т. е.

$$\Delta^r_{-\varepsilon}v_0(0) = -\varepsilon^{-1}\Delta^r_{-\varepsilon}u_0(0),\ r = 1, 2, \ldots, m-1.$$

Аналогично погранслой $w_0(x)$ в точке $x=0$ выбираем так, чтобы $u_0(x) + \varepsilon w_0(x)$ удовлетворяла условиям (4.9) в точке $x=1$, т. е. чтобы

$$\Delta^s_{+\varepsilon}w_0(1) = -\varepsilon^{-1}\Delta^s_{+\varepsilon}u_0(1);\ s = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Таким образом получаем первый член асимптотического ряда для $U_\varepsilon(x)$:

$$z_0(x) = u_0(x) + \varepsilon[v_0(x) + w_0(x)],$$

который образует невязку в выполнении граничных условий (4.8) величины порядка ε. Для исчерпывания этой невязки и возникающих при этом новых невязок определим члены асимптотического ряда для решения $U_\varepsilon(x)$:

$$z_k(x) = u_k(x) + \varepsilon[v_k(x) + w_k(x)].$$

Регулярные члены $u_k(x)$ определяются из уравнения (4.7) условиями

$$u_k(0) = -v_{k-1}(0);\ u_k(1) = -w_{k-1}(1);\ k = 1, 2, \ldots \tag{4.10}$$

Погранслои $v_k(x)$ в точке $x=0$ определяются условиями

$$\Delta^r_{-\varepsilon}v_k(0) = -\varepsilon^{-1}\Delta^r_{-\varepsilon}u_k(0);\ r = 1, 2, \ldots, m-1; \tag{4.11}$$

а погранслои $w_k(x)$ в точке $x = 1$ определяются условиями

$$\Delta^s_{+\varepsilon} w_k(1) = -\varepsilon^{-1}\Delta^s_{+\varepsilon} u_k(1), \quad s = 1, 2; \ \ldots, \ n-1. \tag{4.12}$$

Возможность компенсации невязок погранслоями гарантируется леммой 1.

Так как все члены $z_k(x)$ асимптотического ряда являются решениями исходного уравнения (4.1), то для обоснования полученных асимптотических оценок необходимо только проверить, что разность

$$U_\varepsilon(x) - \sum_{k=1}^{N} \varepsilon^k \{u_k(x) + \varepsilon[v_k(x) + w_k(x)]\}$$

определяется нулевыми граничными условиями с точностью до величин порядка ε^{N+1}, в чем без труда можно убедиться.

Интересно заметить, что, если известно разложение (4.4) производящей функции $p(\lambda)$ распределения P_n, то регулярные члены асимптотического разложения $u_k(x)$ можно построить, не определяя погранслоев. Сформулируем это замечание в виде леммы.

Лемма 2. *Погранслои в точках* $x = 0$ *и* $x = 1$

$$v(x) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i \lambda_i^{x/\varepsilon} \quad \text{и} \quad w(x) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j \lambda_j^{\frac{x-1}{\varepsilon}},$$

определяемые условиями

$$\Delta^r_{-\varepsilon} v(0) = \Lambda_r; \quad r = 1, 2, \ldots, m-1; \tag{4.13}$$

$$\Delta^s_{+\varepsilon} w(1) = M_s; \quad s = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{4.14}$$

принимают в концах отрезка (0.1) *соответственно значения*

$$v(0) = -\sum_{r=1}^{m-1} \frac{(-1)^r \Lambda_r}{r!\, q_0(1)} \frac{d^r}{d\lambda^r}\left[q_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]_{\lambda=1}; \tag{4.15}$$

$$w(1) = -\sum_{s=1}^{n-1} \frac{M_s}{s!\, q_1(1)} \frac{d^s}{d\lambda^s}[q_1(\lambda)]_{\lambda=1}. \tag{4.16}$$

Доказательство. Пусть $q_0(\lambda) = \sum_{r=0}^{m-1} q_{0r}\lambda^{-r}$; тогда из определения погранслоя $v(x)$ следует, что

$$\sum_{r=0}^{m-1} q_{0r} v(-r\varepsilon) = 0.$$

Подставим сюда выражение $v(-r\varepsilon)$ через разности

$$v(-r\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k \Delta^k_{-\varepsilon} v(0);$$

получим

$$0 = \sum_{r=0}^{m-1} q_{0r} \sum_{k=0}^{r} (-1)^k C_r^k \Delta_{-\varepsilon}^k v(0) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \Delta_{-\varepsilon}^k v(0) \sum_{r=k}^{m-1} q_{0r} C_r^k;$$

но легко заметить, что

$$\sum_{r=k}^{m-1} q_{0r} C_r^k = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[q_0 \left(\frac{1}{\lambda} \right) \right]_{\lambda=1}; \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Из последних двух соотношений получаем утверждение (4.15) леммы. Аналогично доказывается формула (4.16).

Например, для регулярного решения уравнения (4.1) с условиями (4.2) и (4.3) можно построить асимптотический ряд, который определится функцией (см. [44]):

$$u(x) = 1 + \frac{\varepsilon g_0}{1 - \varepsilon G} - \frac{x}{1 - \varepsilon G},$$

где

$$g_0 = \frac{d}{d\lambda} [\ln q_0(\lambda)]_{\lambda=1}; \quad G = \frac{d}{d\lambda} \left[\ln \frac{q_0(\lambda)}{q_1(\lambda)} \right]_{\lambda=1}.$$

Изложенный рекуррентный процесс построения асимптотических оценок может быть применен для анализа решений широкого класса разностных уравнений с малым параметром (см. [44]). Основные трудности возникают: при исследовании регулярности вырождения (см. [42]) оператора $\mathbf{P}_\varepsilon$ в предельный оператор $\mathbf{P}_0$, т. е. возможности построения пограслоев, компенсирующих невязку, возникающую при замене исходных граничных условий предельными граничными условиями; при построении пограслоев; наконец, при обосновании асимптотических оценок.

§ 5. Уравнения для регулярных членов асимптотики распределений в схеме Бернулли

В § 1 было получено разностное уравнение (1.4), к решению которого могут быть сведены многие задачи в схеме Бернулли. Мы рассмотрим здесь условные вероятности максимальных уклонений $\mathrm{B}_N^{\pm}(z \mid x)$ и $\mathrm{B}_N(z \mid x)$. Из геометрической иллюстрации блужданий (см. § 1) легко следует, что

$$\mathrm{B}_N^{-}(z \mid x) = \mathrm{B}_N^{+}(z + x \mid x).$$

Поэтому можно ограничиться рассмотрением $\mathrm{B}_N^{+}(z \mid x)$ и $\mathrm{B}_N(z \mid x)$. Учитывая (1.7) и (1.8), из уравнения (1.4) нетрудно получить разностное уравнение (ср. [15]):

$$P(t, x) = p\left(1 + \alpha \frac{x}{t}\right) P\left(t - \frac{1}{N}, \; x - \alpha\right) + q\left(1 - \beta \frac{x}{t}\right) P\left(t - \frac{1}{N}, \; x + \beta\right), \tag{5.1}$$

где

$$\alpha = \frac{q}{\sqrt{Npq}}, \; \beta = \frac{p}{\sqrt{Npq}}, \; 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{5.2}$$

Решением $P^+(t, x; z)$ уравнения (5.1) в условиях

$$P^+(0, x; z) = 1; \qquad (5.3)$$
$$P^+(t, x; z) = 0 \text{ при } x \geqslant z,\ t \geqslant \beta z$$

определяется распределение

$$B_N^+(z \mid x) = P^+(1, x; z). \qquad (5.4)$$

Распределение $B_N(z \mid x)$ определяется решением $P(t, x; z)$ уравнения (5.1) в условиях $P(0, x; z) = 1$;

$$P(t, x; z) = 0 \text{ при } x \geqslant z,\ t \geqslant \beta z \text{ и } x \leqslant -z,\ t \geqslant \alpha z, \qquad (5.5)$$

а именно,

$$B_N(z \mid x) = P(1, x; z). \qquad (5.6)$$

Рекуррентный процесс построения членов асимптотического ряда для регулярной части решения уравнения (5.1) определяется так. Регулярную часть решения ищем в виде ряда

$$P(t, x) = P_0(t, x) + \alpha P_1(t, x) + \alpha^2 P_2(t, x) + \ldots \qquad (5.7)$$

В уравнении (5.1) члены $P\left(t - \frac{1}{N},\ x - \alpha\right)$ и $P\left(t - \frac{1}{N},\ x + \beta\right)$ разложим в ряд Тейлора и сгруппируем члены при одинаковых степенях α, считая $\beta = \nu\alpha\left(\nu = \frac{p}{q}\right)$. Получим разложение разностного оператора $\mathbf{B}$, определяющего уравнение (5.1), в ряд по степеням α;

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_0 + \alpha\mathbf{A}_1 + \alpha^2\mathbf{A}_2 + \ldots. \qquad (5.8)$$

Подставляя (5.7) и (5.8) в уравнение

$$\mathbf{B}[P] = 0$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α, получим рекуррентную систему уравнений для регулярных членов разложения:

$$\mathbf{A}_0[P_0] = 0;$$
$$\mathbf{A}_0[P_1] = -\mathbf{A}_1[P_0]; \qquad (5.9)$$
$$\mathbf{A}_0[P_2] = -\mathbf{A}_1[P_1] - \mathbf{A}_2[P_0].$$

Например, (ср. [15] формулы (16)) уравнения для регулярных членов асимптотики P_0, P_1 и P_2 имеют вид:

$$\mathbf{A}_0[P_0] = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2} - \frac{x}{t}\frac{\partial P_0}{\partial x} - \frac{\partial P_0}{\partial t} = 0; \qquad (5.10)$$

$$\mathbf{A}_0[P_1] = (1 - \nu)\left[\frac{1}{6}\frac{\partial^3 P_0}{\partial x_3} - \frac{x}{2t}\frac{\partial^2 P_0}{\partial x^2}\right]; \qquad (5.11)$$

$$\mathbf{A}_0[P_2] = \frac{\nu}{2}\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\nu^2 - \nu + 1}{6t}\frac{\partial^3 P_0}{\partial x^3} - \frac{\nu^2 - \nu + 1}{24}\frac{\partial^4 P_0}{\partial x^4} -$$
$$- \frac{\nu x}{t}\frac{\partial^2 P_0}{\partial x \partial t} - \frac{\nu}{2}\frac{\partial^2 P_0}{\partial t^2} + (1 - \nu)\left[\frac{1}{6}\frac{\partial^3 P_1}{\partial x^3} - \frac{x}{2t}\frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}\right]. \qquad (5.12)$$

§ 6. Граничные условия для регулярных членов асимптотики (эффект погранслоя)

Выбор граничных условий для членов асимптотического разложения P_0, P_1, P_2 должен учитывать возможность перескока через границы в схеме блуждания, описываемой уравнением (5.1), что приводит к эффекту погранслоя. Мы рассмотрим подробно лишь простейший случай, когда $\nu = \frac{p}{q}$ — целое число. В этом случае эффект погранслоя имеет место только на границе $x = z$.

Лемма 3. *Граничные условия при $x = z$ для первых трех членов P_0, P_1, P_2 асимптотического разложения*

$$P(t, x) = P_0(t, x) + \alpha P_1(t, x) + \alpha^2 P_2(t, x) + \dots$$

регулярной части решения уравнения

$$P(t, x) = p\left(1 + \alpha\frac{x}{t}\right) P\left(t - \frac{1}{N},\ x - \alpha\right) + q\left(1 - \beta\frac{x}{t}\right) P\left(t - \frac{1}{N},\ x + \beta\right) \tag{6.1}$$

с постоянными граничными условиями при $x = z$ в случае, когда $\frac{p}{q} = \nu$ — целое число, определяются соотношениями:

$$P_0(t, z) = P(t, z), \tag{6.2}$$

$$P_1(t, z) = -\frac{\nu - 1}{3}\frac{\partial P_0(t, z)}{\partial x}, \tag{6.3}$$

$$P_2(t, z) = -\frac{\nu(\nu - 1)}{12}\frac{\partial^2 P_0(t, z)}{\partial x^2} + \frac{(\nu + 2)(\nu - 1)}{18}\frac{z}{t}\frac{\partial P_0(t, z)}{\partial x} + \frac{\nu - 1}{3}\frac{\partial P_1(t, z)}{\partial x}. \tag{6.4}$$

Для определения погранслоя на границе $x = z$ перепишем уравнение (6.1) в виде:

$$\mathbf{L}[P(t, x)] = p\left(1 + \alpha\frac{x}{t}\right) P\left(t - \frac{1}{N},\ x - \alpha\right) + q\left(1 - \beta\frac{x}{t}\right) P\left(t - \frac{1}{N},\ x + \beta\right) - P\left(t - \frac{1}{N},\ x\right) = P(t, x) - P\left(t - \frac{1}{N},\ x\right).$$

В операторе $\mathbf{L}$ введем замену переменных $x = z + \alpha y$ и разложим его по степеням α:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \alpha\mathbf{L}_1 + \alpha^2\mathbf{L}_2, \tag{6.5}$$

где

$$\mathbf{L}_0[w(y)] = pw(y-1) + qw(y+\nu) - w(y); \tag{6.6}$$

$$\mathbf{L}_1[w(y)] = p\frac{z}{t}[w(y-1) - w(y+\nu)]; \tag{6.7}$$

$$\mathbf{L}_2[w(y)] = p\frac{y}{t}[w(y-1) - w(y+\nu)]. \tag{6.8}$$

Выделим в операторе $\mathbf{L}_0$ «регулярную» часть

$$\Delta^2[w(y)] = w(y+1) - 2w(y) + w(y-1)$$

и оператор G, определяющий погранслой

$$\mathbf{L}_0 = \Delta^2 G. \tag{6.9}$$

Расщепление (6.9) осуществляется разложением производящей функции оператора

$$l(\lambda) = p\lambda^{-1} + q\lambda^{\nu} - 1$$

на множители

$$l(\lambda) = (\lambda - 2 + \lambda^{-1}) \cdot q\sum_{r=0}^{\nu-1}(\nu - r)\lambda^r.$$

Множитель

$$g(\lambda) = q\sum_{r=0}^{\nu-1}(\nu - r)\lambda^r = p\sum_{r=0}^{\nu-1}\left(1 - \frac{r}{\nu}\right)\lambda^r \tag{6.10}$$

является производящей функцией оператора G.

Так как все корни многочлена $g(\lambda)$ больше единицы по абсолютной величине (см. лемму 1, § 4), то имеет место регулярность вырождения. Иначе говоря, погранслоем

$$w(y) = \sum_{i=1}^{\nu-1} a_i\lambda_i^{\frac{y}{\alpha}} = \sum_{i=1}^{\nu-1} a_i\lambda_i^{\frac{x-z}{\alpha}} \tag{6.11}$$

(λ_i $(1 \leqslant i \leqslant \nu - 1)$ — корни многочлена $g(\lambda)$) можно полностью компенсировать невязку граничных условий, которую создают регулярные члены на границе $x = z$. В соответствии со схемой метода, изложенной в § 4, определим второй рекуррентный процесс построения погранслоев. Подставляя асимптотический ряд погранслоев

$$\alpha w_0 + \alpha^2 w_1 + \alpha^3 w_2 + \ldots$$

в (6.5), получим рекуррентную систему разностных уравнений для погранслоев

$$\begin{gathered} G[w_0] = \sum_{r=0}^{\nu-1}\left(1 - \frac{r}{\nu}\right)w_0(y+r) = 0; \\ \mathbf{L}_0[w_1] = -\mathbf{L}_1[w_0]; \\ \mathbf{L}_0[w_2] = -\mathbf{L}_1[w_1] - \mathbf{L}_2[w_0]. \end{gathered} \tag{6.12}$$

Граничные условия при $x = z$ для регулярных членов и погранслоев определим из следующих соображений (см. § 4). Искомое решение $P(t, x)$ уравнения (6.1) ищем в виде:

$$P(t, x) = P_0(t, x) + \alpha P_1(t, x) + \alpha^2 P_2(t, x) + \alpha w_0(t, x) + \alpha^2 w_1(t, x) + o(\alpha^2). \tag{6.13}$$

Граничные условия при $x \geqslant z$ для $P(t, x)$ в условиях леммы можно записать в виде

$$\Delta_\alpha^r P(t, z) = 0; \; r = 1, 2, \ldots, \nu - 1. \tag{6.14}$$

Из представления (6.13) получаем граничные условия для регулярных членов:

$$\begin{aligned} P_0(t, z) &= P(t, z); \\ P_1(t, z) &= -w_0(t, z); \\ P_2(t, z) &= -w_0(t, z). \end{aligned} \tag{6.15}$$

Из условий (6.13) и (6.14) имеем

$$\begin{aligned} 0 = \Delta_\alpha^r P_0(t, z) + \alpha \Delta_\alpha^r P_1(t, z) + \alpha^2 \Delta_\alpha^r P_2(t, z) + \\ + \alpha \Delta_\alpha^r w_0(t, z) + \alpha^2 \Delta_\alpha^r w_1(t, z) + o(\alpha^2). \end{aligned}$$

Заменим здесь разности от регулярных членов разложением по производным с точностью до $o(\alpha^2)$ и сгруппируем члены с одинаковыми степенями α. Получим граничные условия для погранслоев

$$\Delta_\alpha w_0(t, z) = -\frac{\partial P_0(t, z)}{\partial x}, \tag{6.16}$$

$$\Delta_\alpha^r w_0(t, z) = 0; \; r = 2, 3, \ldots, \nu - 1,$$

$$\Delta_\alpha w_1(t, z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_0(t, z)}{\partial x^2} - \frac{\partial P_1(t, z)}{\partial x}; \tag{6.17}$$

$$\Delta_\alpha^2 w_1(t, z) = -\frac{\partial^2 P_0(t, z)}{\partial x^2},$$

$$\Delta_\alpha^r w_1(t, z) = 0; \; r = 3, 4, \ldots, \nu - 1.$$

Чтобы избежать необходимости определения погранслоя w_0, воспользуемся леммой 2 § 4. Из (6.12) и (6.16) с учетом (4.16) находим

$$w_0(t, z) = \frac{g'(1)}{g(1)} \frac{\partial P_0(t, z)}{\partial x}.$$

Из (6.10) получаем

$$\frac{g'(1)}{g(1)} = \frac{\nu - 1}{3}.$$

Следовательно (см. (6.15))

$$P_1(t, z) = -\frac{\nu - 1}{3} \frac{\partial P_0(t, z)}{\partial x}.$$

Формула (6.3) установлена. Сложнее определить граничное условие для $P_2(t, z)$, так как погранслой w_1 определяется неоднородным разностным уравнением (6.12). Найдем сначала частное решение $w_{11}(y)$ уравнения (6.12)

$$\mathbf{L}_0[w_{11}(y)] = -\mathbf{L}_1[w_0(y)]. \tag{6.18}$$

Учитывая вид операторов $\mathbf{L}_0$ и $\mathbf{L}_1$ (см. (6.6) и (6.7)), легко убедиться, что

$$w_{11}(y) = \frac{z}{t} y w_0(y). \tag{6.19}$$

Общее решение уравнения (6.18) имеет вид

$$w_1(y) = w_{10}(y) + \frac{z}{t} y w_0(y),$$

где $w_{10}(y)$ — погранслой, удовлетворяющий однородному уравнению. Из (6.16), (6.17) и (6.19) найдем граничные условия для $w_{10}(y)$.

$$\Delta_a w_{10}(0) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_0(t,z)}{\partial x^2} - \frac{\partial P_1(t,z)}{\partial x} - \frac{z}{t}\frac{\partial P_0(t,z)}{\partial x}\left[\frac{g'(1)}{g(1)} - 1\right];$$

$$\Delta_a^2 w_{10}(0) = -\frac{\partial^2 P_0(t,z)}{\partial x^2} + \frac{2z}{t}\frac{\partial P_0(t,z)}{\partial x}; \tag{6.20}$$

$\Delta_a^r w_{10}(0) = 0$; $r = 3, 4, \ldots, \nu - 1$. Применяя теперь лемму 2 § 4, учитывая, что $w_1(0) = w_{10}(0)$ и вычисляя значения $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$ (см. (6.10)), получим (6.4).

Процесс определения регулярных членов асимптотики решения уравнения (6.1) может быть, конечно, продолжен.

Нам остается сделать замечание о возможностях применения изложенного метода. В случае* $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$ (m, n — целые взаимно простые числа; $m + n = M$) распределение P_ε вероятностей перехода в схеме блужданий Бернулли будет решетчатым с максимальным шагом $\varepsilon = \frac{1}{M\sqrt{Npq}}$. Применяя леммы 1 и 2 § 4, в этом случае получим, например, граничные условия для первого регулярного члена асимптотики решения уравнения (5.1) в условиях (5.5):

$$P_1(t, z) = -\frac{q_1'(1)}{q_1(1) M (p-q)}\frac{\partial P_0(t,z)}{\partial x},$$

$$P_2(t, -z) = -\frac{q_0'(1)}{q_0(1) M (p-q)}\frac{\partial P_0(t,-z)}{\partial x}. \tag{6.21}$$

Множители $q_0(\lambda)$ и $q_1(\lambda)$ определяются из разложения (4.4), в котором $p(\lambda) = p\lambda^{-n} + q\lambda^m - 1$. Заметим, что коэффициенты в (6.21) зависят только

* Этот случай включает задачи изучения распределений между двумя эмпирическими кривыми распределения (см. введение).

от одного параметра p, так как максимальный шаг решетчатого распределения Бернулли с рациональным параметром p определяется по представлению p в виде несократимой дроби.

Если распределение вероятностей перехода в схеме блуждания решетчатое, и соответствующие случайные величины ограничены то, по-видимому, проведение асимптотического анализа распределений максимальных уклонений изложенным методом также возможно.

§ 7. Результаты асимптотического анализа распределений максимальных уклонений

Метод, изложенный в предыдущих трех параграфах, позволяет получить конкретные результаты по асимптотическому анализу распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли и в предельной для нее пуассоновской схеме.

Оценки остаточных членов в приведенных ниже конкретных асимптотических разложениях здесь не приводятся ввиду их громоздкости; методика таких оценок имеется в работе автора [29] § 6 и 7.

Мы приведем здесь некоторые результаты, ограничиваясь лишь первыми двумя членами асимптотического разложения. Дальнейшие уточнения асимптотики не вызывают принципиальных затруднений, но связаны с преодолением весьма громоздких и утомительных выкладок. Заметим, что на каждом следующем шаге уточнения асимптотики исходными являются результаты предыдущих шагов.

Для построения асимптотических членов разложения условных распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли воспользуемся дифференциальными уравнениями, которыми определяются эти члены, полученными в § 5 (см. (5.10)—(5.12)).

Теорема 1*. *В схеме Бернулли при* $\frac{1}{p}$ *целом и* $x \leqslant z$ *условное распределение вероятностей максимальных односторонних уклонений* $\mathrm{B}_N^+(z \mid x)$ *асимптотически представимо в виде*

$$\mathrm{B}_N^+(z \mid x) \sim B_0^+(z \mid x) + \frac{1-2p}{\sqrt{Npq}} B_1^+(z \mid x) + \frac{1}{Npq} B_2^+(z \mid x),$$

где

$$B_0^+(z \mid x) = 1 - e^{-2z(z-x)}; \tag{7.1}$$

$$B_1^+(z \mid x) = \frac{2}{3}(z-x)(1-zx)e^{-2z(z-x)};$$

$$B_2^+(z) = \frac{2}{9}[3(1-pq)z(x-z) + 2(1-pq)z^4 - 2(1+2pq)z^3x +$$

$$+ 9pqz^2x^2 - 3pqzx^3 - (1-4pq)z^2x^2(x-z)^2]e^{-2z(z-x)}.$$

Как указано в § 5, $\mathrm{B}_N^+(z \mid x) = P^+(1, x; z)$, где $P^+(t, x; z)$ — решение разностного уравнения (5.1) с условиями (5.3). При $\frac{1}{p}$ целом отсутствует пере-

* В работе [29] пропущено условие: $\frac{1}{p}$ — целое число.

скок через границу $x = z$, следовательно, нет эффекта погранслоя. Значит, граничные условия для P_0, P_1 и P_2 имеют вид:

$$P_0(0, x) = 1, \quad x < z; \tag{7.2}$$
$$P_0(t, z) = 0, \quad t > 0;$$
$$P_1(0, x) = 0, \quad x < z; \tag{7.3}$$
$$P_1(t, z) = 0, \quad t > 0;$$
$$P_2(0, x) = 0, \quad x < z; \tag{7.4}$$
$$P_2(t, z) = 0, \quad t > 0.$$

Решая уравнение (5.10) с условиями (7.2), получим

$$P_0(t, x) = 1 - e^{\frac{-2z(z-x)}{t}}. \tag{7.5}$$

Подставляя (7.5) в (5.11) и решая уравнение (5.11) с условиями (7.3), получим $\left(\nu = \frac{p}{q}\right)$

$$P_1(t, x) = \frac{2(1-\nu)}{3}\left[\frac{z-x}{t} + \frac{zx(x-z)}{t^2}\right] e^{-\frac{2z(z-x)}{t}}. \tag{7.6}$$

Аналогично из уравнения (5.12) с условиями (7.4) определяется $P_2(t, x)$. Далее из представления

$$B_N^+(z \mid x) = P_0(1, x) + \alpha P_1(1, x) + \alpha^2 P_2(1, x) + o(\alpha^2)$$

получаем (7.1).

Теорема 2. *В схеме Бернулли при* $\frac{1}{1-p}$ *целом и* $-z < x < z$ *условное распределение вероятностей максимальных уклонений* $B_N(z \mid x)$ *асимптотически представимо в виде*

$$B_N(z \mid x) \sim B_0(z \mid x) + \frac{1-2p}{\sqrt{Npq}} B_1(z \mid x),$$

где

$$B_0(z \mid x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2kz(kz-x)}; \tag{7.7}$$

$$B_1(z \mid x) = -\frac{1}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k [2k(k-1)z - 2kzx(kz-x) - kx] e^{-2kz(kz-x)}.$$

В условиях теоремы эффект погранслоя имеет место лишь на границе $x = z$. Значит, граничные условия для $P_0(t, x)$ и $P_1(t, z)$ с учетом леммы 3 имеют вид:

$$P_0(0, x) = 1, \quad |x| < z, \tag{7.8}$$
$$P_0(t, z) = P_0(t, -z) = 0, \quad t > 0,$$
$$P_1(0, x) = 0, \quad |x| < z, \tag{7.9}$$
$$P_1(t, -z) = P_1(t, z) = -\frac{\nu - 1}{3}\frac{\partial P_0(t, z)}{\partial x}.$$

Решая уравнение (5.10) с условиями (7.8), а затем (5.11) с условиями (7.9), получим требуемый результат. В частности, полагая $p = \frac{m}{N}$ и $q = \frac{n}{N}$ $(m + n = N)$, $x = 0$ в (7.1) и (7.7) найдем асимптотические оценки для $\mathbf{S}^{+}_{n,m}(z)$ (см. [5] и [29]) и $\mathbf{S}_{n,m}(z)$. Так в разложении

$$\mathbf{S}_{n,m}(z) \sim S_0(z) + \frac{1-2p}{\sqrt{Npq}} S_1(z) \tag{7.10}$$

получим (ср. [5] и [8])

$$S_0(z) = K_0(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2}; \tag{III$_0$}$$

$$S_1(z) = -\frac{2z}{3} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k k^2 e^{-2k^2z^2}. \tag{III$_1$}$$

В разложении

$$\mathbf{S}^{+}_{nm}(z) \sim S^{+}_0(z) + \frac{1-2p}{\sqrt{Npq}} S^{+}_1(z) + \frac{1-pq}{Npq} S^{+}_2(z) \tag{IV$_0$}$$

при n кратном m имеем (см. [15])

$$S^{+}_0(z) = 1 - e^{-2z^2}, \tag{IV$_1$}$$

$$S^{+}_1(z) = \frac{2}{3} ze^{-2z^2}, \tag{IV$_2$}$$

$$S^{+}_2(z) = \frac{2z^2}{3}\left(1 - \frac{2z^2}{3}\right) e^{-2z^2}. \tag{IV$_3$}$$

Теорема 3. *Безусловные распределения*

$$\mathrm{B}^{+}_N(z) = \mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant k \leqslant N} s_k < z\},\ \mathrm{B}^{-}_N(z) = \mathbf{P}\{-\min_{0 < k \leqslant N} s_k < z\},$$

$$\mathrm{B}_N(z) = \mathbf{P}\{\max_{0 \leqslant k \leqslant N} | s_k | < z\}$$

максимальных уклонений в схеме Бернулли с целым $\frac{1}{p}$ *асимптотически представимы в виде*:

$$\mathrm{B}^{\pm}_N(z) \sim 2\Phi(z) + \frac{1-2p}{\sqrt{Npq}} B^{\pm}_1(z), \tag{7.11}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^z e^{-x^2/2} dx,$$

$$B^{+}_1(z) = \frac{2-z^2}{3\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},\ B^{-}_1(z) = -\frac{z^2}{3\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

и

$$\mathrm{B}_N(z) \sim B_0(z) + \frac{1-2p}{\sqrt{Npq}} B_1(z), \tag{7.12}$$

где

$$B_0(z) = 1 + 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \int_{(2k-1)z}^{\infty} e^{-x^2/2} dx,$$

$$B_1(z) = \frac{2}{3\sqrt{2\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2k-1) e^{-\frac{(2k-1)^2 z^2}{2}}.$$

Утверждение теоремы получим, используя асимптотические разложения (7.1) и (7.7) для условных распределений максимальных уклонений, локальную теорему для плотностей в схеме Бернулли в форме

$$\mathbf{B}_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Npq}}\, e^{-x^2/2} + \frac{p-q}{6Npq\sqrt{2\pi}}\,(3x - x^3)\, e^{-x^2/2} + O\left(\frac{1}{(Npq)^{3/2}}\right)$$

и асимптотическую формулу (3.5). Заметим, что наличие погранслоя в асимптотическом разложении условных распределений в асимптотике безусловных распределений сказывается лишь в членах порядка $\varepsilon^2\left(\varepsilon = \frac{p-q}{\sqrt{Npq}}\right)$.

Теорема 4. *В схеме Бернулли при* $\frac{p}{q} = \frac{m}{n}$, *где* m *и* n *— целые взаимно простые числа* $(m + n = M)$ *в разложениях*

$$\mathrm{B}_N^+(z \mid x) \sim B_0^+(z \mid x) + \frac{1}{\sqrt{Npq}} B_1^+\left(z \mid x; \frac{m}{n}\right),$$

и

$$\mathrm{B}_N(z \mid x) \sim B_0(z \mid x) + \frac{1}{\sqrt{Npq}} B_1\left(z \mid x; \frac{m}{n}\right)$$

имеют место соотношения

$$B_1^+\left(z \mid x; \frac{m}{n}\right) = (1-2p)\, B_1^+(z \mid x) + \frac{2q_1}{M}\,(x - 2z)\, e^{-2z(z-x)}; \tag{7.13}$$

$$B_1\left(z \mid x; \frac{m}{n}\right) = (1-2p)\, B_1(z \mid x) + \frac{1}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \sin^2\frac{k\pi}{2}\, e^{-2kz(kz-x)} +$$

$$+ \frac{q_1 - q_0}{M}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k k\,(x - 2kz)\, e^{-2kz(kz-x)}. \tag{7.14}$$

Здесь

$$q_0 = \frac{q_0'(1)}{q_0(1)},\quad q_1 = \frac{q_1'(1)}{q_1(1)}.$$

Предельный переход при $p \to 0$ $(Np \to m)$ в разложениях, указанных в теоремах 1—3, дает соответствующие разложения для распределений максимальных уклонений в пуассоновском процессе. Малым параметром в этих разложениях будет $\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Теорема 5. *Для распределений максимальных уклонений в пуассоновском процессе имеют место представления* $(c = m + x\sqrt{m})$:

$$\Pi_m^+(z \mid c) \sim B_0^+(z \mid x) - \frac{1}{\sqrt{m}} B_1^+(z \mid x), \tag{7.15}$$

$$\Pi_m(z \mid c) \sim B_0(z \mid x) + \frac{1}{\sqrt{m}} B_1(z \mid x), \tag{7.16}$$

$$\Pi_m^+(z) \sim 2\Phi(z) - \frac{1}{\sqrt{m}} B_1^+(z), \tag{7.17}$$

$$\Pi_m(z) \sim B_0(z) + \frac{1}{\sqrt{m}} B_1(z). \tag{7.18}$$

Поступила в редакцию
2.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Л. Чебышев, Собрание сочинений, **2**, 1947.
[2] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, М., ИЛ, 1947.
[3] C. G. Essen, Fourier analysis of distribution functions, A mathematical study of the Laplace — Gaussian law, Acta Math., **77** (1945), 1—125.
[4] А. Н. Колмогоров, Sulla determinazione empirico di una legge di distribuzione, Giorn. d. Att., **4** (1933), 83—91.
[5а] Н. В. Смирнов, Приближение законов распределения случайных величин по эмпирическим данным, Усп. матем. наук, **10** (1944), 179—206.
[5б] Н. В. Смирнов, О критерии симметрии закона распределения случайной величины, ДАН СССР, **56**, 1 (1947), 13—16.
[6] Б. В. Гнеденко, Некоторые результаты о максимальном расхождении между двумя эмпирическими распределениями, ДАН СССР, **82**, 5 (1952), 661—663.
[7] Чжан Ли-цянь, О точном распределении статистики Н. В. Смирнова и его асимптотическом разложении, Шусюэ цзиньчжань, **1**, **4** (1955), 775—790 (кит., рез. русск.).
[8] Чжан Ли-цянь, О точном распределении статистики А. Н. Колмогорова и его асимптотическом разложении, Шусюэ Тюэбао, math. sinica, **6**, 1 (1956), 55—81 (кит., рез. русск.).
[9] K. L. Chung, An estimate concerning the Kolmogoroff limit distribution, Trans. Amer. Math. Soc., **67**, 1 (1949), 36—50.
[10] Ю. В. Прохоров, Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей, Теор. вероят. и ее примен., 1,2 (1956), 177—235.
[11] В. М. Золотарёв, Об одной задаче из теории ветвящихся случайных процессов, Успехи матем. наук, **9**, 2 (1954), 147—156.
[12] А. А. Боровков, Некоторые задачи больших уклонений максимума сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, ДАН СССР, **121**, 1 (1958), 13—15.
[13] И. И. Гихман, Об одной асимптотической теореме для сумм малых случайных слагаемых, Тр. инст. матем. и мех. АН УзССР, **10**, 1 (1953).
[14] И. И. Гихман, Об одном уточнении закона больших чисел, Матем. сб. Киевск. унив., № 6 (1952).
[15] В. С. Королюк, Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова, ДАН СССР, **95**, 3 (1954), 443—446; Изв. АН СССР, сер. матем., **19**, 1 (1955), 102—124.
[16] В. С. Королюк, Асимптотические разложения для распределения максимальных уклонений в схеме Бернулли, ДАН СССР, **108**, 2 (1956), 183—186.
[17] Н. В. Смирнов, Оценка расхождения между эмпирическими кривыми распределения в двух независимых выборках, Бюлл. Моск. ун-та, сер. А, **2**, 2 (1939), 3—14.
[18] Н. В. Смирнов, Об уклонениях эмпирической кривой распределения, Матем. сб., 6 (48) (1939), 3—26.
[19] И. И. Гихман, Б. В. Гнеденко, Н. В. Смирнов, Непараметрические задачи статистики, Труды III Всесоюзного матем. съезда, **3** (1956), 320—333.
[20] Б. В. Гнеденко, Курс теории вероятностей, М.—Л., 1954.
[21] Б. В. Гнеденко и В. С. Королюк, О максимальном расхождении двух эмпирических распределений, ДАН СССР, **80**, 4 (1951), 525—528.
[22] В. С. Королюк и Б. І. Ярошевський, Вивчення максимального розходження двох емпіричних розподілів, ДАН УРСР, **80**, 4 (1951), 243—247.
[23] Б. В. Гнеденко и Е. Л. Рвачева, Об одной задаче сравнения двух эмпирических распределений, ДАН СССР, **82**, 4 (1952), 513—516.
[24] Б. В. Гнеденко и В. С. Михалевич, О распределении числа выходов одной эмпирической функции распределения над другой, ДАН СССР, **82**, 6 (1952), 841—843.
[25] Б. В. Гнеденко и В. С. Михалевич, Две теоремы о поведении эмпирической функции распределения, ДАН СССР, **85**, 1 (1952), 25—27.
[26] В. С. Михалевич, О взаимном расположении двух эмпирических функций распределения, ДАН СССР, **85**, 3 (1952), 485—488.

[27] Б. В. Гнеденко, Проверка неизменности распределения вероятностей в двух независимых выборках, Mathem Nachrichten, **12**, 1 (2) (1954), 29—63.
[28] Е. Л. Рвачева, О макимальном расхождении между двумя эмпирическими распределениями, Укр. матем. журнал, **4**, 3 (1952), 373—392.
[29] В. С. Королюк, О расхождении эмпирических распределений для случая двух независимых выборок, Изв. АН СССР, сер. матем., **19**, 1 (1955), 81—96.
[30] В. Озолс, О векторандах и непараметрическом критерии согласия для двух конечных выборок, Изв. Латвийской АН, 8 (1956), 150—158.
[31] F. I. Massey, The distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions, Ann. Math. Stat., **22** (1951), 125—128.
[32] Chia Kuei Tsao, An extension of Massey's distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions, Ann. Math. Stat., **25**, 3 (1954), 587—593.
[33] I. Blackman, An extension of the Kolmogorov distribution, Ann. Math. Stat., **27**. 2 (1956), 519—521.
[34] I. Blackman, Correction to «Extension of the Kolmogorov distribution», Ann. Math. Stat., **29**, 1 (1958), 318—324.
[35] I. Kemperman, Some exact formulae for the Kolmogorov — Smirnov distributions, Proc. Neder. Akad. Wet., **60A**, 5 (1957), 535—540.
[36] I. L. Hodges, The significance probability of the Smirnov two-sample test, Arkiv for Math., **3**, 5 (1958), 469—486.
[37] H. David, A tree sample Kolmogorov — Smirnov test, Ann. Math. Stat., **29**, 3 (1958), 842—852.
[38] W. Feller, On the Kolmogoroff — Smirnof limit theorems for empirical distribution, Ann. Math. Stat., **19** (1948), 177—183.
[39] Н. Н. Ченцов, Слабая сходимость случайных процессов, Теор. вероят. и ее примен., **I**, 1 (1956), 155—160.
[40] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИЛ, 1952.
[41] Н. Н. Боголюбов и Н. М. Крылов, Введение в нелинейную механику, Изд. АН УССР, 1937.
[42] М. И. Вишик и Л. А. Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, Усп. матем. наук, **12**, 5 (1957), 3—122.
[43] М. А. Евграфов, Асимптотические оценки и целые функции., М., ГИТТЛ, 1957.
[44] В. С. Королюк, Асимптотичний аналіз імовірності вбирання в одномірній схемі випадкових блукань з решітчастим розподілом імовірностей переходу, ДАН УРСР, **7** (1959).
[45] Дж. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.
[46] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, М.— Л., 1949.
[47] A. Pellet, Sur un mode de séparation des racines des équations et la formule de Lagrange, Bull. des Scienc. math., 5 (1881), 393—395.

ASYMPTOTICAL ANALYSIS OF MAXIMUM DEVIATION DISTRIBUTIONS IN THE BERNOULLI SCHEME

V. S. KOROLJUK (KIEV)

(Summary)

Methods are related for constructing asymptotic expansions for maximum deviation distribution in the Bernoulli scheme and in its limiting case, the Poisson scheme. The paper contains a review of results on the asymptoticity of distributions of the maximum deviations between a theoretical and an empirical distribution functions, and also between two empirical distribution functions.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1959

ON THE MAXIMUM PARTIAL SUMS OF SEQUENCES OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

R. P. PAKSHIRAJAN

1. We consider a sequence $\{X_\nu\}$, $\nu=1,2,\ldots$ of independent random variables with left continuous distribution functions $F_\nu(x)$, and with $\mathbf{E}X_\nu=0$, $\mathbf{E}|X_\nu|^2=\sigma_\nu^2$. Let

$$S_n=\sum_{\nu=1}^{n} X_\nu$$

and

$$s_n^2=\sum_{\nu=1}^{n}\sigma_\nu^2.$$

We assume that $s_n\to\infty$ as $n\to\infty$, and

$$\frac{1}{(\log s_n)^{1/2}s_n^{2-3\alpha}}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|>s_n^{1-\alpha}} x^2\,dF_\nu(x)=O(1) \tag{1}$$

where α lies in the interval $0<\alpha\leqslant 3/4$. Let

$$S_n^*=\max_{1\leqslant\nu\leqslant n}|S_\nu|.$$

Under the assumptions that the X_ν have finite variance, and that they satisfy the Central Limit Theorem, P. Erdos and M. Kac [3] have shown that

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\left(\frac{S_n^*}{s_n}<x\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\exp\left(-\frac{(2i+1)^2\pi^2}{8x^2}\right). \tag{2}$$

K. L. Chung [2] calculated the rate of this convergence,* and proved some strong limit theorems for S_n^* under the additional assumptions

$$\mathbf{E}|X_\nu|^3=\gamma_\nu<\infty,\quad \nu=1,2,\ldots,$$

---

* Чжун показал, что разность между вероятностью $\mathbf{P}\left(\frac{S_n^*}{s_n}<x\right)$ и ее пределом при $n\to\infty$ имеет порядок $\frac{\log\log s_n}{\log s_n}$. (Прим. ред.)

$$M_n = \max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \frac{\gamma_\nu}{\sigma_\nu^2} = O(s_n^{1-\theta}) \tag{3}$$

where θ is a fixed but arbitrarily small number.

The object of this paper is to show that all of the results obtained by Chung remain true under the weaker condition (1), with $\alpha \in \left(0, \frac{3}{4}\right]$. The method of proof is exactly the same as used by Chung, the point of departure being the use of Berry's estimates involving only second moments ([1]) in place of Esseen's estimates involving third moments [4]. We remark that condition (1) is considerably weaker than condition (3) in that there exist random variables X satisfying (1), but whose third absolute moments are not finite. As an example consider random variables X_ν such that

$$\mathbf{P}\left(X_\nu = \pm \frac{r}{\nu^{\frac{3}{8}}}\right) = \frac{c}{r^4}; \quad r = 1,2,\ldots; \quad \nu = 1,2,\ldots$$

where $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{c}{r^4} = \frac{1}{2}$. This sequence of random variables satisfies condition (1) with $\alpha = \frac{3}{4}$.

Before proceeding to the proof, we make the following remarks concerning condition (1):

(a) Every sequence $\{X_\nu\}$ satisfying (3) satisfies (1) with $\alpha = \frac{\theta}{4}$.

(b) No sequence $\{X_\nu\}$ can satisfy (1) with $\alpha \geqslant 1$.

(c) If (1) is satisfied for some $\alpha = \alpha_1$ say, then it is satisfied for all $\alpha \leqslant \alpha_1$. Also, since the $F_\nu(x)$ are left continuous, if (1) is satisfied for all $\beta < \alpha$ then it is satisfied for $\beta = \alpha$. Hence we can speak of (1) being satisfied for a maximum α.

(d) If (1) is satisfied for a maximum α, where $\alpha \in \left(\frac{3}{4}, 1\right)$, then it can be shown that the sequence $\{X_\nu\}$ satisfies (3) with $\theta = \alpha$. This, together with (a) implies equivalence of (1) and (3) if α is in the interval specified above.

(e) If the X_ν have a common distribution function $F(x)$ then (1) reduces to

$$\frac{n^{\frac{3\alpha}{1-\alpha}}}{(\log n)^{\frac{1}{2}}} \int_{|x|>n} x^2 \, dF(x) = O(1).$$

This condition is satisfied if the X_ν have finite absolute moments of order $2+\delta$ $(0 < \delta < 1)$. In this case $\alpha = \frac{\delta}{3+\delta}$. Thus even in the case of identically distributed random variables condition (1) is weaker than (3).

(f) Condition (1) implies Lindeberg's necessary and sufficient condition for the Central Limit Theorem to hold.

(g) It follows from (1) that

$$\max_{1 \leqslant \nu \leqslant n} \sigma_\nu^2 = O(s_n^{2-2\alpha}). \tag{4}$$

2. Let $k = k(n)$ be an integer-valued function of n such that

$$k \sim \frac{\alpha \log s_n}{2 \log 10}. \tag{5}$$

We form the sequence $\{n_j\}$; $j=0,1,\ldots,k$ with $n_0=0$ and $n_k=n$, and introduce the functions *

$$B_j;\ F_j(u_1,\ldots,u_j);\ \Phi_j(u_1,\ldots,u_j);\ R_j(u_1,\ldots,u_j);$$

$$F_j^*(x);\ \Phi_j^*(x);\ R_j^*(x);\ F_0(u_1,\ldots,u_k);\ \Phi_0(u_1,\ldots,u_k).$$

In this way we obtain the result as given by Chung [2]:

$$\sup |F_{j+1}(u_1,\ldots,u_{j+1}) - \Phi_{j+1}(u_1,\ldots,u_{j+1})| \leqslant$$
$$\leqslant 3 \sup |R_j(u_1,\ldots,u_j)| + \sup_x |R_{j+1}^*(x)|.$$

Using (4) we can show

$$B_j^2 = s_{n_j}^2 - s_{n_{j-1}}^2 \sim k^{-1} s_n^2.$$

3. In this and the following sections many of the steps are valid only for large values of n. Hence, we assume n to be sufficiently large. We utilize Berry's inequality [1] with the remark that the inequality holds if ε therein is replaced by ε_n, any function of n, provided the corresponding condition with ε_n is satisfied; that is

$$\sup_x |R_j^*(x)| \leqslant \text{constant} \cdot \left[\frac{\varepsilon_n + \frac{\eta_j}{\varepsilon_n}}{\left(1 - \frac{\eta_j^2}{\varepsilon_n^2} - \eta_j\right)} - \frac{\eta_j}{\varepsilon_n^2} + \log \frac{1}{\left(1 - \frac{\eta_j^2}{\varepsilon_n^2} - \eta_j\right)^{\frac{1}{2}}} \right] \tag{6}$$

provided

$$\frac{\eta_j^2}{\varepsilon_n^2} + \eta_j < 1 \tag{7}$$

where

$$\eta_j = \frac{1}{B_j^2} \sum_{\nu=n_{j-1}+1}^{n_j} \int_{|x| > \varepsilon_n B_j} x^2 \, dF_\nu(x)$$

$$\leqslant \frac{2k}{s_n^2} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| > \frac{\varepsilon_n s_n k^{-\frac{1}{2}}}{2}} x^2 dF_\nu(x). \tag{8}$$

The constant in (6) is independent of the choice of the sequence $\{X_\nu\}$, and ε_n is at our disposal subject to (7). We put $\varepsilon_n = 2k^{\frac{1}{2}} s_n^{-\alpha}$, where $\alpha \in (0, \frac{3}{4}]$.

* Следующие далее обозначения см. [2]. (Прим. ред.)

Clearly $\varepsilon_n \to 0$ as $n \to \infty$ by (5). With ε_n so defined we obtain

$$\frac{\eta_j}{\varepsilon_n^2} \leqslant \frac{1}{2s_n^{2-2\alpha}} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| > s_n^{1-\alpha}} x^2 \, dF_\nu(x) \tag{9}$$

so (7) is easily seen to be satisfied. Also

$$\frac{\eta_j}{\varepsilon_n^3} \leqslant \frac{1}{4k^{1/2} s_n^{2-3\alpha}} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{|x| > s_n^{1-\alpha}} x^2 \, dF_\nu(x) \tag{10}$$

by (1). Using (10), and expanding in series, we obtain

$$\sup_x |R_j^*(x)| \leqslant A_1 k^{\frac{1}{2}} s_n^{-\alpha} \tag{11}$$

where the constant A_1 depends only on the order term in (1).

Proceeding as in Chung [2], we obtain

$$|F_0(u_1, \ldots, u_k) - \Phi_0(u_1, \ldots, u_k)| \leqslant A_1 10^k s_n^{-\alpha}. \tag{12}$$

4. Let c be a positive constant, g_n a monotone function of n, and $\delta_n = O(1)$. Should

$$\delta_n^2 g_n^2 \geqslant \frac{16\theta \log 10}{\alpha} \frac{\log \log s_n}{\log s_n} \tag{13}$$

we prove

$$\mathbf{P}(S_n^* < c g_n s_n) \geqslant \mathbf{P}(\max_{1 \leqslant \nu \leqslant k} |S_{n_\nu}| < (c - \delta_n) g_n s_n) - R_n \tag{14}$$

where

$$R_n = O((\log s_n)^{-\theta}) \tag{15}$$

and θ is an arbitrary positive number.

Proof: Let

$$p_n = \mathbf{P}(S_n^* < c g_n s_n),$$

$$\omega_r = \mathbf{P}(S_{r-1}^* < c g_n s_n, \ |S_r| \geqslant c g_n s_n).$$

Therefore

$$\sum_{r=1}^{n} \omega_r = \mathbf{P}(S_n^* \geqslant c g_n s_n) = 1 - p_n \leqslant 1. \tag{16}$$

Now suppose that $n_{j-1} < r \leqslant n_j$. In this case

$$\omega_r = \mathbf{P}(S_{r-1}^* < c g_n s_n, \ |S_r| \geqslant c g_n s_n, \ |S_{n_j} - S_r| \geqslant \delta_n g_n s_n)$$
$$+ \mathbf{P}(S_{r-1}^* < c g_n s_n, \ |S_r| \geqslant c g_n s_n, \ |S_{n_j} - S_r| < \delta_n g_n s_n) = \alpha_r + \beta_r \ (\text{say}).$$

It is easily seen that

$$\alpha_r = \omega_r \mathbf{P}(|S_{n_j} - S_r| \geqslant \delta_n g_n s_n) \tag{17}$$

and

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{r=n_{j-1}+1}^{n_j}\beta_r = \mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant\nu\leqslant k}|S_{n_\nu}| \geqslant (c-\delta_n)\,g_n s_n\right)$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant\nu\leqslant k}|S_{n_\nu}| < (c-\delta_n)\,g_n s_n\right). \tag{18}$$

We now introduce a non-negative integer-valued function $A = A(j, n)$ which will be specified later. We consider the following cases.

Case (I): $n_j - r \leqslant A$. In this case Chebyshev's inequality yields

$$\mathbf{P}\left(|S_{n_j} - S_r| \geqslant \delta_n g_n s_n\right) \leqslant \frac{s_{n_j}^2 - s_{n_j-A}^2}{\delta_n^2 g_n^2 s_n^2}. \tag{19}$$

Case (II): $n_j - r > A$. Using Berry's inequality we obtain

$$\mathbf{P}\left(|S_{n_j} - S_r| \geqslant \delta_n g_n s_n\right) \leqslant \int_v^\infty e^{-\frac{u^2}{2}}\,du + O(p)$$

where

$$v = \frac{\delta_n g_n s_n}{\left(s_{n_j}^2 - s_{n_j-A}^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

and

$$p = \frac{\lambda_n + \frac{\eta_{j,r}}{\lambda_n}}{\left(1 - \frac{\eta_{j,r}^2}{\lambda_n^2} - \eta_{j,r}\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\eta_{j,r}}{\lambda_n^2} + \log\frac{1}{\left(1 - \frac{\eta_{j,r}^2}{\lambda_n^2} - \eta_{j,r}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

provided

$$\frac{\eta_{j,r}^2}{\lambda_n^2} + \eta_{j,r} < 1$$

λ_n otherwise at our choice. Here

$$\eta_{j,r} = \frac{1}{s_{n_j}^2 - s_r^2}\sum_{\nu=r+1}^{n_j}\int_{|x|>\lambda_n\left(s_{n_j}^2 - s_r^2\right)^{\frac{1}{2}}} x^2\,dF_\nu(x)$$

$$\leqslant \frac{1}{s_{n_j}^2 - s_{n_j-A}^2}\sum_{\nu=1}^{n}\int_{|x|>s_n^{1-\alpha}} x^2\,dF_\nu(x) \tag{20}$$

for

$$\lambda_n = \frac{s_n^{1-\alpha}}{\left(s_{n_j}^2 - s_{n_j-A}^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Now choose A so that

$$s_{n_j}^2 - s_{n_j-A}^2 \sim s_n^{2-\alpha}\left(\frac{16\theta\log 10}{\alpha}\,\frac{\log\log s_n}{\log s_n}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{21}$$

This is possible since the right-hand side is $o(B_j^2)$ and

$$\max_{1\leqslant v\leqslant n}\sigma_v^2 = o\left(s_n^{2-\alpha}\left(\frac{16\theta\log 10}{\alpha}\,\frac{\log\log s_n}{\log s_n}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$$

which holds because of (4). From A and λ_n so defined we see that $\lambda_n\to 0$. Also, using (1), we have $\eta_{j,r}/\lambda_n^3\to 0$. Therefore

$$p\leqslant \text{constant}\cdot\left(\frac{\log s_n}{\log\log s_n}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{s_n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

$$\text{Now},\ \int_v^\infty e^{\frac{-u^2}{2}}du \leqslant \frac{1}{v}\,e^{\frac{-v^2}{2}}$$

$$\leqslant 2k^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{-1}g_n^{-1}e^{-\frac{1}{4}\delta_n^2 g_n^2 k}. \tag{22}$$

Therefore, in case (II)

$$\mathbf{P}\left(|S_{n_j}-S_r|\geqslant \delta_n g_n s_n\right)\leqslant 2k^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{-1}g_n^{-1}e^{-\frac{1}{4}\delta_n^2 g_n^2 k}+\text{constant}\cdot\left(\frac{\log s_n}{\log\log s_n}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{s_n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

From (21) and (22) we have

$$\frac{s_{n_j}^2-s_{n_j-A}^2}{\delta_n^2 g_n^2 s_n^2}\leqslant\left(\frac{\log s_n}{\log\log s_n}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{s_n^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Hence, for both cases

$$\mathbf{P}\left(|S_{n_j}-S_n|\geqslant\delta_n g_n s_n\right)\leqslant\text{constant}\cdot\left\{k^{-\frac{1}{2}}\delta_n^{-1}g_n^{-1}\exp\left(-\frac{1}{4}\delta_n^2 g_n^2 k\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\log s_n}{\log\log s_n}\right)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{s_n^{\frac{\alpha}{2}}}\right\}=R_n.$$

From (5) and (13) we have

$$R_n = O\left((\log s_n)^{-\theta}\right)$$

the constant in this order term depending only on α and θ. Also (16) and (17) lead to

$$1-p_n\leqslant 1-\mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant v\leqslant k}|S_{n_v}|<(c-\delta_n)\,g_n s_n\right)+R_n$$

which is equivalent to (14).

5. The rest of the steps are the same as in Chung [2]; hence we omit them.

Department of Mathematics
University of Oregon
Eugene, Oregon

Поступила в редакцию
3.6.59

REFERENCES

[1] A. C. Berry, The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent random variables, Trans. Amer. Math. Soc., **49** (1941), 122—136.
[2] K. L. Chung, On the maximum partial sums of sequences of independent random variables, Trans. Amer. Math. Soc., **64** (1948), 205—233.
[3] P. Erdos and M. Kac, On certain limit theorems of the theory of probability, Proc. Amer. Math. Soc., **52** (1946), 292—302.
[4] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law, Acta Math., **77** (1945), 1—125.

О МАКСИМАЛЬНЫХ ЧАСТИЧНЫХ СУММАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Р. П. ПАКШИРАЙАН

(Резюме)

В настоящей работе результаты К. Л. Чжуна [2], относящиеся к максимальным частичным суммам последовательностей независимых случайных величин, получены при более слабом условии. Метод доказательства аналогичен использованному Чжуном с тем отличием, что вместо оценок Эссеена, связанных с третьими моментами, применяются оценки Берри, связанные только со вторыми моментами.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 4
1959

ON THE ESTIMATION OF REGRESSION COEFFICIENTS OF A CONTINUOUS PARAMETER TIME SERIES WITH A STATIONARY RESIDUAL

CHIANG TSE-PEI

1. Introduction. The problem of estimating the regression coefficient in a time series with stationary residuals has been extensively discussed recently (See references). In his thesis [1] U. Grenander discussed the problem of estimating a constant mean value of a continuous parameter stationary ime series. For the discrete parameter case, further work was carried outs by U. Grenander and M. Rosenblatt in [2—6].

In the present paper we shall discuss this problem in the continuous parameter case with several regression variables. In section 2, the least-squares estimate and the Markov estimate are established in our case, general properties of these estimates are discussed. Applying these general properties, in section 3 we examine the asymptotic behavior of the covariance matrices of the least-squares and Markov estimates when the regression is a trigonometric regression, and the least-squares estimate is shown to be asymptotically as good as the Markov estimate.

Results of this paper are generalization of some of those obtained in [1]. Our proof can be used also in the case of a discrete parameter. One can then see that the conditions imposed upon the process were weaker than those required in [2], [3].

Method of proof used in this paper is the generalized harmonic analysis of regression vectors which has been used in [1—4].

2. The least - squares estimate and the Markov estimate. Let $y(t) = x(t) + m(t)$ be a complex-valued stochastic process with mean value $\mathrm{E}\, y(t) = m(t)$ and residual $x(t)$ weakly stationary. The parameter set is the set of all real numbers. The regression $m(t)$ is assumed to be of the orm

$$m(t) = \sum_{\nu=1}^{s} \gamma_\nu \varphi_\nu(t) \qquad (1)$$

where the regression variables $\varphi_\nu(t)$, $(1 \leqslant \nu \leqslant s)$ are assumed to be known. The spectral distribution function of the residual is assumed to be absolutely continuous, and the spectral density $f(\lambda)$ positive almost everywhere. Assume that the realizations of the process $y(t)$ are observed in a time interval $(-T, T)$ and that one wishes to estimate the regression coefficients from these observations.

When we want to find good linear estimate

$$C_T = \begin{pmatrix} C_T^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_T^{(s)} \end{pmatrix}$$

of

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_s \end{pmatrix}.$$

One possibility is to use the method of least squares, that is to minimize

$$\int_{-T}^{T} \left| y(t) - \sum_{\nu=1}^{s} C_T^{(\nu)} \varphi_\nu(t) \right|^2 dt$$

with respect to $C_T^{(\nu)}$. It is easy to see that the least-squares estimate is

$${}_L C_T = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \int_{-T}^{T} y(t) \overline{\varphi_1(t)}\, dt \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \int_{-T}^{T} y(t) \overline{\varphi_s(t)}\, dt \end{pmatrix} \tag{2}$$

where

$$\Phi = (\Phi_{\mu\nu})_{s\times s}, \quad \Phi_{\mu\nu} = \int_{-T}^{T} \overline{\varphi_\mu(t)}\, \varphi_\nu(t)\, dt.$$

In case of trigonometric or polynomial regression (or more generally in the case of stationary regression considered in [2], [3]) the matrix Φ is evidently nonsingular. Hence in these cases the least-squares estimate is well defined by (2). The estimate ${}_L C_T$ is unbiased since

$$\mathrm{E}\, {}_L C_T = \Phi^{-1} \Phi \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_s \end{pmatrix}. \tag{3}$$

However, the best linear unbiased estimate ${}_0 C_T$ of γ is the Markov estimate in the sense that the covariance matrix of any other linear unbiased estimate C_T of γ is greater than or equal to that of ${}_0 C_T$, i. e.

$$\mathrm{E}\, ({}_0 C_T - \gamma)\, \overline{({}_0 C_T - \gamma)}' \leqslant \mathrm{E}\, (C_T - \gamma)\, \overline{(C_T - \gamma)}'. \tag{4}$$

The above matrix inequality (4) means that the matrix

$$\mathrm{E}\, (C_T - \gamma)\, \overline{(C_T - \gamma)}' - \mathrm{E}\, ({}_0 C_T - \gamma)\, \overline{({}_0 C_T - \gamma)}'$$

is non-negative definite.

In order to show the existence of the Markov estimate we need the following lemmas.

Lemma 1. *Suppose that there exist s points $u_1, \ldots, u_s$ in the interval $(-T, T)$ such that the square matrix*

$$(\varphi_\nu(u_\mu)); \quad 1 \leqslant \nu, \ \mu \leqslant s$$

is nonsingular. Then every linear unbiased estimate $C_T^{(\nu)}$ of γ_ν can be expressed in the following way

$$C_T^{(\nu)} = \text{l. i. m.}_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} d_{nj}^{(\nu)} y(t_{nj}^{(\nu)}) \tag{5}$$

where

$$|t_{nj}^{(\nu)}| \leqslant T \quad (1 \leqslant j \leqslant n; \ n = 1, 2, \ldots)$$

and

$$\sum_{j=1} d_{nj}^{(\nu)} \varphi_\mu(t_{nj}^{(\nu)}) = \delta_{\nu\mu}^{*} \quad (\mu = 1, 2, \ldots, s).$$

Proof. Since $C_T^{(\nu)}$ is a linear unbiased estimate of γ_ν we have

$$C_T^{(\nu)} = \text{l. i. m.}_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} d_{nj}^{(\nu)} y(\omega_{nj}^{(\nu)}) \tag{6}$$

where

$$|\omega_{nj}^{(\nu)}| \leqslant T, \quad (1 \leqslant j \leqslant n; \ n = 1, 2, \ldots)$$

and

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} d_{nj}^{(\nu)} \varphi_\mu(\omega_{nj}^{(\nu)}) = \delta_{\nu\mu}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, s).$$

Let

$$r_{\nu\mu}^{(n)} = \delta_{\nu\mu} - \sum_{j=1}^{n} d_{nj}^{(\nu)} \varphi_\mu(\omega_{nj}^{(\nu)}).$$

Then

$$\lim_{n\to\infty} r_{\nu\mu}^{(n)} = 0, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, s). \tag{7}$$

Consider the system of linear equations

$$\sum_{j=1}^{s} \varphi_\mu(u_j) z_j = r_{\nu\mu}^{(n)}, \quad (\mu = 1, 2, \ldots, s).$$

By the hypothesis of the lemma, this system of equations has a uniquely determined set of solutions $e_{n1}^{(\nu)}, \ldots, e_{ns}^{(\nu)}$. From (6), (7), it follows that

$$C_T^{(\nu)} = \text{l. i. m.}_{n\to\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} d_{nj}^{(\nu)} y(\omega_{nj}^{(\nu)}) + \sum_{j=1}^{s} e_{nj}^{(\nu)} y(u_j) \right]$$

and the lemma is proved.

* Symbol $\delta_{\nu\mu}$ is the Kronecker's δ.

In the following we shall use the Hilbert space method. It is convenient to introduce Hilbert space whose elements are random variables and the inner product is then defined as

$$(h,\ g) = \mathrm{E}\, h\bar{g}.$$

Consider the set $\Omega_0^{(\nu)}$ consisting of all elements of the form

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x(t_j) \text{ with } \sum_{j=1}^{n} d_j \varphi_l(t_j) = \delta_{\nu l},\ (1 \leqslant l \leqslant s) \text{ and } t_j \in (-T,\ T).$$

As this set is convex, so by a theorem in the theory of Hilbert space [7] we know there exists exactly one element $\mathfrak{Z}^{(\nu)}$ in the closure $\Omega^{(\nu)}$ of the set $\Omega_0^{(\nu)}$ such that

$$\|\mathfrak{Z}^{(\nu)}\| = \inf_{\mathfrak{Z} \in \Omega^{(\nu)}} \|\mathfrak{Z}\|.$$

Thus we have proved the following lemma.

Lemma 2. *There exists a uniquely determined linear unbiased estimate $N_T^{(\nu)}$ of γ_ν with minimum variance in the class of all unbiased linear estimates of γ_ν.*

For fixed positive integer R, let us consider the stochastic sequence

$$y\left(\frac{n}{2^R}\right);\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

If we observe the realization of this stochastic sequence in the time interval $-[T2^R] \leqslant n \leqslant [T2^R]$ * then there also exists a uniquely determined linear unbiased estimate $N_{TR}^{(\nu)}$ of γ_ν with minimum variance.

Lemma 3.

$$N_T^{(\nu)} = \text{l. i. m.}_{R \to \infty} N_{TR}^{(\nu)}, \tag{8}$$

provided that all the regression variables $\varphi_\nu(t)$; $\nu = 1, 2, \ldots, s$ are continuous functions of t.

Proof. Since $\varphi_\nu(t)$; $\nu = 1, 2, \ldots, s$ are all continuous, so by lemma 1, we have

$$N_T^{(\nu)} = \text{l. i. m.}_{R \to \infty} \sum_{j=1}^{\sigma_R} d_{\nu j}^{(R)} y(t_{\nu j}^{(R)}) \tag{9}$$

where $t_{\nu j}^{(R)} = \frac{n_{\nu j}}{2^R}$, $n_{\nu j}$ are integers such that $|n_{\nu j}| \leqslant [T2^R]$ and

$$\sum_{j=1}^{\sigma_R} d_{\nu j}^{(R)} \varphi_l(t_{\nu j}^{(R)}) = \delta_{\nu l},\ (l = 1, 2, \ldots, s).$$

Denote the sum in the right side of (9) by $Q_{TR}^{(\nu)}$ then

$$\|N_T^{(\nu)} - \gamma_\nu\| \leqslant \|N_{TR}^{(\nu)} - \gamma_\nu\| \leqslant \|Q_{TR}^{(\nu)} - \gamma_\nu\|.$$

Hence

$$\lim_{R \to \infty} \|N_{TR}^{(\nu)} - \gamma_\nu\| = \|N_T^{(\nu)} - \gamma_\nu\|.$$

* $[T2^R]$ denotes the integral part of $T2^R$.

By a theorem in the theory of Hilbert space [7] our lemma is proved. Now we are in a position to prove the existence of Markov estimate

Theorem 1. *Suppose*

1°. *All regression variables* $\varphi_\nu(t)$, $(1 \leqslant \nu \leqslant s)$ *are continuous functions of* t,

2°. *there exist* $u_1, \ldots, u_s$ *in the interval* $(-T, T)$ *such that* $[\varphi_\nu(u_\mu)]_{1\leqslant\nu,\ \mu\leqslant s}$ *is nonsingular.* *

Then $\begin{pmatrix} N_T^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_T^{(s)} \end{pmatrix}$ *is the Markov estimate of* γ, i. e. $N_T^{(\nu)} = {}_0C_T^{(\nu)}$, $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$.

Proof. Suppose $\begin{pmatrix} C_T^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_T^{(s)} \end{pmatrix}$ be an arbitrary linear unbiased estimate of γ.

Since all $\varphi_\nu(t)$ are continuous, we have

$$C_T^{(\nu)} = \underset{R\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ M_{TR}^{(\nu)}, \tag{10}$$

where

$$M_{TR}^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{\sigma_R} e_{\nu j}^{(R)} y(t_{\nu j}^{(R)}),$$

$t_{\nu j}^{(R)} = \frac{n_{\nu j}^{(R)}}{2^R}$, $n_{\nu j}^{(R)}$ are integers with $|n_{\nu j}^{(R)}| \leqslant [T2^R]$

$$\sum_{j=1}^{\sigma_R} e_{\nu j}^{(R)} \varphi_l(t_{\nu j}^{(R)}) = \delta_{\nu l}, \quad (l = 1, 2, \ldots, s).$$

By a theorem in [2], [3] we have

$$\mathbf{E}\begin{pmatrix} N_{TR}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_{TR}^{(s)} \end{pmatrix} (\overline{N_{TR}^{(1)}}, \ldots, \overline{N_{TR}^{(s)}}) \leqslant \mathbf{E}\begin{pmatrix} M_{TR}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{TR}^{(s)} \end{pmatrix} (\overline{M_{TR}^{(1)}}, \ldots, \overline{M_{TR}^{(s)}}).$$

Letting $R \to \infty$ we obtain (using (9), (10))

$$\mathbf{E}\begin{pmatrix} N_T^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ N_T^{(s)} \end{pmatrix} (\overline{N_T^{(1)}}, \ldots, \overline{N_T^{(s)}}) \leqslant \mathbf{E}\begin{pmatrix} C_T^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_T^{(s)} \end{pmatrix} (\overline{C_T^{(1)}}, \ldots, \overline{C_T^{(s)}}).$$

This proves our theorem.

* In the following we shall always assume that conditions 1°, 2° are fulfilled.

Theorem 2. *For the Markov estimate ${}_0C_T$ there exists a square matrix K_0 with constant complex numbers as its elements such that*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_0 C_T^{(1)} \overline{x(t)} \\ \vdots \\ \mathrm{E}_0 C_T^{(s)} \overline{x(t)} \end{pmatrix} = K_0 \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1(t)} \\ \vdots \\ \overline{\varphi_s(t)} \end{pmatrix}, \quad (|t| \leqslant T). \tag{11}$$

Proof. The matrix equation

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_0 C_T^{(1)} \overline{x(u_1)} \dots \mathrm{E}_0 C_T^{(1)} \overline{x(u_s)} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathrm{E}_0 C_T^{(s)} \overline{x(u_1)} \dots \mathrm{E}_0 C_T^{(s)} x(u_s) \end{pmatrix} = K_0 \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1(u_1)} \dots \overline{\varphi_1(u_s)} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \overline{\varphi_s(u_1)} \dots \overline{\varphi_s(u_s)} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

has an unique solution K_0. We shall prove that K_0 is the required constant matrix. If not, then there is a u_{s+1} with $|u_{s+1}| \leqslant T$ such that

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_0 C_T^{(1)} \overline{x(u_{s+1})} \\ \vdots \\ \mathrm{E}_0 C_T^{(s)} \overline{x(u_{s+1})} \end{pmatrix} \neq K_0 \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1(u_{s+1})} \\ \vdots \\ \overline{\varphi_s(u_{s+1})} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Let $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ be the unique solution of the following system of equations

$$\begin{pmatrix} \overline{\varphi_1(u_1)} \dots \overline{\varphi_1(u_s)} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ \overline{\varphi_s(u_1)} \dots \overline{\varphi_s(u_s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1(u_{s+1})} \\ \vdots \\ \overline{\varphi_s(u_{s+1})} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Postmultiplying both sides of (12) by the column matrix $\begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_s} \end{pmatrix}$ we obtain

$$[\mathrm{E}_0 C_T^{(i)} \overline{x(u_j)}]_{1 \leqslant i,\ j \leqslant s} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_s} \end{pmatrix} = K_0 [\overline{\varphi_i(u_j)}]_{1 \leqslant i,\ j \leqslant s} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_s} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

From (13) — (15) it follows that

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}_0 C_T^{(1)} \overline{x(u_{s+1})} \\ \vdots \\ \mathrm{E}_0 C_T^{(s)} \overline{x(u_{s+1})} \end{pmatrix} \neq [\mathrm{E}_0 C_T^{(i)} \overline{x(u_j)}]_{1 \leqslant i,\ j \leqslant s} \begin{pmatrix} \overline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \overline{\alpha_s} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Then for certain ν, we have

$$\mathrm{E}_0 C_T^{(\nu)} \overline{x(u_{s+1})} \neq \mathrm{E}_0 C_T^{(\nu)} \overline{\sum_{j=1}^{s} \alpha_j x(u_j)}.$$

We introduce

$$M_T^{(\nu)} = {}_0C_T^{(\nu)} + \varepsilon \left\{ y(u_{s+1}) - \sum_{j=1}^{s} \alpha_j y(u_j) \right\}$$

which is a linear unbiased estimate of γ_ν.

Now

$$\mathbf{E}\,|M_T^{(\nu)} - \gamma_\nu|^2 = \mathbf{E}\,|{}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu|^2 +$$

$$+ 2\varepsilon\,\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\,({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)\,\overline{(x(u_{s+1}) - \sum_{j=1}^{s} \alpha_j x(u_j))} \right] + O(\varepsilon^2).$$

It is possible to choose ε such that $\mathbf{E}\,|M_T^{(\nu)} - \gamma_\nu|^2 < \mathbf{E}\,|{}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu|^2$, contrary to the definition of ${}_0C_T^{(\nu)}$. Therefore the theorem is proved.

Theorem 3. *Suppose* $M_T = \begin{pmatrix} M_T^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ M_T^{(s)} \end{pmatrix}$ *be a linear unbiased estimate of* γ *and*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}\,M_T^{(1)}\,\overline{x(t)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{E}\,M_T^{(s)}\,\overline{x(t)} \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1(t)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \overline{\varphi_s(t)} \end{pmatrix}, \quad (|t| \leqslant T) \tag{17}$$

where K *is a constant matrix.*

Then

1°.

$$\mathbf{E} \begin{pmatrix} M_T^{(1)} - \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_T^{(s)} - \gamma_s \end{pmatrix} \overline{(M_T^{(1)} - \gamma_1, \ \ldots, \ M_T^{(s)} - \gamma_s)} = K.$$

2°. M_T *is the Markov estimate of* γ.

Proof. 1) As $M_T^{(\nu)} = \underset{n\to\infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{j=1}^{n} d_{\nu j}^{(n)} y(t_{\nu j}^{(n)})$ with

$$\sum_{j=1}^{n} d_{\nu j}^{(n)} \varphi_l(t_{\nu j}^{(n)}) = \delta_{\nu l}, \quad (1 \leqslant l \leqslant s)$$

we get

$$\mathbf{E}\,(M_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)\,\overline{(M_T^{(\mu)} - \gamma_\mu)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E} M_T^{(\nu)} \sum_{j=1} \overline{d_{\mu j}^{(n)} X(t_{\mu j}^{(n)})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \overline{d_{\mu j}^{(n)}} \sum_{l=1}^{s} K_{\nu l} \overline{\varphi_l(t_{\mu j}^{(n)})} = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{s} K_{\nu l} \sum_{j=1}^{n} \overline{d_{\mu j}^{(n)} \varphi_l(t_{\mu j}^{(n)})} =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} K_{\nu l} \delta_{\mu l} = K_{\nu\mu}.$$

2) From (12), (17) we have

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}\,(M_T^{(1)} - {}_0C_T^{(1)})\,\overline{x(t)} \\ \vdots \\ \mathrm{E}\,(M_T^{(s)} - {}_0C_T^{(s)})\,\overline{x(t)} \end{pmatrix} = (K - K_0) \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1(t)} \\ \\ \overline{\varphi_s(t)} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \overline{\varphi_1(t)} \\ \\ \overline{\varphi_s(t)} \end{pmatrix} \tag{18}$$

where $Q = K - K_0$.

Without loss of generality, we may assume

$${}_0C_T^{(\nu)} = \text{l. i. m.}_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} e_{\nu j}^{(n)} y(t_{\nu j}^{(n)})$$

with

$$\sum_{j=1}^{n} e_{\nu j}^{(n)} \varphi_l(t_{\nu j}^{(n)}) = \delta_{\nu l}, \quad (1 \leqslant l \leqslant s),$$

thus

$$\mathrm{E} = |M_T^{(\nu)} - {}_0C_T^{(\nu)}|^2 = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\,(M_T^{(\nu)} - {}_0C_T^{(\nu)}) \sum_{j=1}^{n} \overline{(d_{\nu j}^{(n)} - e_{\nu j}^{(n)})\, x(t_{\nu j}^{(n)})} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \overline{(d_{\nu j}^{(n)} - e_{\nu j}^{(n)})} \sum_{l=1}^{s} Q_{\nu l} \overline{\varphi_l(t_{\nu j}^{(n)})} = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{s} Q_{\nu l} \sum_{j=1}^{n} \overline{(d_{\nu j}^{(n)} - e_{\nu j}^{(n)})\, \varphi_l(t_{\nu j}^{(n)})} = 0.$$

Hence

$$M_T^{(\nu)} = {}_0C_T^{(\nu)}.$$

3. Asymptotic behavior of the covariance matrices of estimates ${}_LC_T$ and ${}_0C_T$ when the regression is trigonometric.

Theorem 4. *If* 1°. $y(t) = x(t) + \sum_{\nu=1}^{s} \gamma_\nu e^{i\lambda_\nu t}$ (*i. e. the regression is a trigonometric regression*), 2°. *the spectral density* $f(\lambda)$ *of the residual* $x(t)$ *is continuous at points* $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, *then*

$$\lim_{T\to\infty} 2T \cdot \mathrm{E}\,({}_LC_T - \gamma)\,\overline{({}_LC_T - \gamma)}' = 2\pi \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_s) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Proof. By formula (2)

$$\mathrm{E}\,({}_LC_T - \gamma)\,\overline{({}_LC_T - \gamma)}' =$$

$$= \mathrm{E}\Phi^{-1} \begin{pmatrix} \int_{-T}^{T} x(t)\,\overline{\varphi_1(t)}\,dt \\ \vdots \\ \int_{-T}^{T} x(t)\,\overline{\varphi_s(t)}\,dt \end{pmatrix} \left(\int_{-T}^{T} \overline{x(t)}\,\varphi_1(t), \ldots, \int_{-T}^{T} \overline{x(t)}\,\varphi_s(t)dt \right) \Phi^{-1} =$$

$$= \Phi^{-1}\left[\mathrm{E}\int_{-T}^{T} x(t)\,\overline{\varphi_u(t)}\,dt \int_{-T}^{T} \overline{x(t)}\,\varphi_v(t)\,dt\right]_{1\leqslant u,\, v\leqslant s} \Phi^{-1}. \tag{20}$$

But

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\,\mathrm{E}\int_{-T}^{T} x(t)\,\overline{\varphi_u(t)}\,dt \int_{-T}^{T} \overline{x(t)}\,\varphi_v(t)\,dt =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} e^{i\lambda(t-r)}\,\overline{\varphi_u(t)}\,\varphi_v(r)\,dt\,dr =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,d\lambda \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda-\lambda_u)t}\,dt \int_{-T}^{T} e^{-i(\lambda-\lambda_v)r}\,dr =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\dfrac{e^{iT(\lambda-\lambda_u)}-e^{-iT(\lambda-\lambda_u)}}{i(\lambda-\lambda_u)}\,\dfrac{e^{-iT(\lambda-\lambda_v)}-e^{iT(\lambda-\lambda_v)}}{-i(\lambda-\lambda_v)}\,d\lambda \\ \lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\dfrac{4\sin^2 T(\lambda-\lambda_u)}{(\lambda-\lambda_u)^2}\,d\lambda \end{cases} = \begin{cases} 0, & (u\neq v) \\ 2\pi f(\lambda_u), & (u=v) \end{cases}$$

and

$$\lim_{T\to\infty} 2T\Phi^{-1} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\Phi\right]^{-1} = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{i(\lambda_v-\lambda_u)t}\,dt\right]^{-1}_{1\leqslant u,\, v\leqslant s} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Hence (19) is true and the theorem is proved.

Now we are going to examine the asymptotic behavior of the covariance matrix of the Markov estimate ${}_0C_T$. The method used in the following is due to U. Grenander [1]. We shall assume

(A) The stationary residual $x(t)$ is purely non-deterministic (see [8] [9]).

(B) For fixed ν, $(1\leqslant\nu\leqslant s)$ there is a quadratically integrable function $\Psi_\nu(\lambda)$ with

$$|\Psi_\nu(\lambda)|^2 = f(\lambda) = F'(\lambda)$$

and such that the function $g_\nu(a)$ defined by

$$g_\nu(a) = \underset{A\to\infty}{\text{l. i. m.}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} e^{i\alpha_\lambda}\Psi_\nu(\lambda)\,d\lambda$$

vanishes for $a<0$.

(C) $$\Psi_\nu(\lambda+\lambda_\nu) = \alpha_\nu + \beta_\nu\lambda\,(1+o(\lambda)),\quad (\lambda\to 0)$$

where α_ν is real and $\alpha_\nu\neq 0$.

Consider the Hilbert space of all quadratically integrable functions of λ with respect to the measure $dG(\lambda)$ where

$$G(\lambda) = F(\lambda) + \sum_{\nu=1}^{s}\varepsilon(\lambda-\lambda_\nu)\ *.$$

* $\varepsilon(\lambda) = \begin{cases} 1, & (\lambda\geqslant 0) \\ 0, & (\lambda<0) \end{cases}$

Evidently the function

$$H_T^{(\nu)}(\lambda) = \frac{e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}\frac{1}{\overline{\Psi_\nu(\lambda)}} - e^{iT(\lambda-\lambda_\nu)}\frac{1}{\Psi_\nu(\lambda)}}{\lambda-\lambda_\nu} \tag{21}$$

has a finite norm. Denote the subspace spanned by all functions $e^{it\lambda}$, $(|t|\leqslant T)$ by $\lambda_2(T)$. Put

$$H_T^{(\nu)}(\lambda) = \frac{e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}\left[\frac{1}{\overline{\Psi_\nu(\lambda)}} - \frac{1}{\Psi_\nu(\lambda_\nu)}\right]}{\lambda-\lambda_\nu} + \frac{e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)} - e^{iT(\lambda-\lambda_\nu)}}{\Psi_\nu(\lambda_\nu)(\lambda-\lambda_\nu)} +$$

$$+ \frac{e^{iT(\lambda-\lambda_\nu)}\left[\frac{1}{\Psi_\nu(\lambda_\nu)} - \frac{1}{\Psi_\nu(\lambda)}\right]}{\lambda-\lambda_\nu} = H_{1T}^{(\nu)}(\lambda) + H_{2T}^{(\nu)}(\lambda) + H_{3T}^{(\nu)}(\lambda). \tag{22}$$

The functions $H_{jT}^{(\nu)}(\lambda)$, $j=1, 2, 3$ clearly have finite norms. Put $H_T^{(\nu)}(\lambda)^* =$ projection of $H_T^{(\nu)}(\lambda)$ on $\lambda_2(T)$. Suppose that

$$H_T^{(\nu)}(\lambda)^* = \text{l. i. m.}_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} d_k^{(n)} e^{it_k^{(n)}\lambda} \quad \text{with } |t_k^{(n)}| \leqslant T$$

and let

$$m_T^{(\nu)} = \text{l. i. m.}_{n\to\infty} \sum_{k-1}^{n} d_k^{(n)} y(t_k^{(n)}). \tag{22'}$$

Then we can prove the following lemma.

Lemma 4.

$$\mathrm{E}\, m_T^{(\nu)}\overline{x(t)} = e_T^{(\nu)} e^{-it\lambda_\nu} + \sum_{\mu=1}^{s} [H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu) - H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]\, e^{-it\lambda_\mu}, \ (|t|\leqslant T) \tag{23}$$

where $e_T^{(\nu)}$ is a complex number such that

$$\lim_{T\to\infty} e_T^{(\nu)} = -2\pi i \Psi_\nu(\lambda_\nu). \tag{24}$$

Proof. For $|t|\leqslant T$ we have

$$\mathrm{E}\, m_T^{(\nu)}\overline{x(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} H_T^{(\nu)}(\lambda)^* e^{-i\lambda} f(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} H_T^{(\nu)}(\lambda)^* e^{-i\lambda}\, dG(\lambda) -$$

$$- \sum_{\mu=1}^{s} H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^* e^{-i\lambda_\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} H_T^{(\nu)}(\lambda)\, e^{-it\lambda} dG(\lambda) - \sum_{\mu=1}^{s} H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^* e^{-i\lambda_\mu} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} H_T^{(\nu)}(\lambda)\, e^{-it\lambda} f(\lambda)\, d\lambda + \sum_{\mu=1}^{s} [H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu) - H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]\, e^{-i\lambda_\mu}.$$

Put

$$n_T^{(\nu)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H_T^{(\nu)}(\lambda)\, e^{-it\lambda} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Then for $-T \leqslant t_1,\ t_2 \leqslant T$

$$n_T^{(\nu)}(t_2)\, e^{it_2\lambda_\nu} - n_T^{(\nu)}(t_1)\, e^{it_1\lambda_\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(-T-t_2)\lambda} - e^{i(-T-t_1)\lambda}}{\lambda} \Psi_\nu(\lambda+\lambda_\nu)\, d\lambda -$$

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(T-t_2)\lambda} - e^{i(T-t_1)\lambda}}{\lambda} \overline{\Psi_\lambda(\lambda+\lambda_\nu)}\, d\lambda.$$

By condition (2) and using Plancherel's theorem we can show these two integrals are all zero. Thus

$$n_T^{(\nu)}(t)\, e^{it\lambda_\nu} = e_T^{(\nu)},\ (|t| \leqslant T).$$

To calculate $e_T^{(\nu)}$:

$$e_T^{(\nu)} = n_T^{(\nu)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} H_T^{(\nu)}(\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = 2i \int_{-\infty}^{\infty} \cos T\lambda \frac{\operatorname{Im} \Psi_\nu(\lambda+\lambda_\nu)}{\lambda}\, d\lambda -$$

$$- 2i \int_{-\infty}^{\infty} \sin T\lambda \frac{\operatorname{Re} \Psi_\nu(\lambda+\lambda_\nu)}{\lambda}\, d\lambda.$$

As $T \to \infty$ the first integral tends to zero (by Rieman — Lebesque theorem) and the second integral tends to $-2\pi i \Psi_\nu(\lambda_\nu)$. This proves (24).

Lemma 5.

$$\lim_{T\to\infty} [H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu) - H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*] = 0. \tag{25}$$

Proof.

$$H_T^{(\nu)}(\lambda)^* = H_{1T}^{(\nu)}(\lambda)^* + H_{2T}^{(\nu)}(\lambda)^* + H_{3T}^{(\nu)}(\lambda)^*.$$

But

$$H_{2T}^{(\nu)}(\lambda) = \frac{1}{\Psi_\nu(\lambda_\nu)} \frac{e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)} - e^{iT(\lambda-\lambda_\nu)}}{\lambda-\lambda_\nu} = \frac{1}{i\Psi_\nu(\lambda_\nu)} \int_{-T}^{T} e^{i(\lambda-\lambda_\nu)t} dt \in \lambda_2(T).$$

Hence

$$H_{2T}^{(\nu)}(\lambda)^* = H_{2T}^{(\nu)}(\lambda). \tag{25'}$$

Now

$$H_{1T}^{(\nu)}(\lambda) = e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)} \frac{\dfrac{1}{\overline{\Psi_\nu(\lambda)}} - \dfrac{1}{\Psi_\nu(\lambda)}}{\lambda-\lambda_0} = e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)} J_\nu(\lambda)$$

where

$$J_\nu(\lambda) = \frac{\dfrac{1}{\Psi_\nu(\lambda)} - \dfrac{1}{\Psi_\nu(\lambda)}}{\lambda - \lambda_\nu}.$$

The projection ${}_TJ_\nu^*(\lambda)$ of $J_\nu(\lambda)$ on the subspace spanned by all functions $e^{i(T+t)\lambda}$; $|t| \leqslant T$ is $e^{iT(\lambda-\lambda_\nu)} H_{1T}^{(\nu)}(\lambda)^*$ and as $T \to \infty$, ${}_TJ_\nu^*(\lambda)$ tends to ${}_\infty J_\nu^*(\lambda)$. Thus

$$(H_{1T}^{(\nu)}(\lambda),\ 1) = (H_{1T}^{(\nu)}(\lambda)^*,\ 1) = (e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}\ {}_TJ_\nu^*(\lambda),\ 1) =$$

$$= (e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}{}_TJ_\nu^*(\lambda) - e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}\ {}_\infty J_\nu^*(\lambda),\ 1) + (e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}\ {}_\infty J_\nu^*(\lambda),\ 1). \quad (26)$$

As $T \to \infty$ the first term clearly tends to zero, and the second term

$$(e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}\ {}_\infty J_\nu^*(\lambda),\ 1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}\ {}_\infty J_\nu^*(\lambda)\, dG(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)}\ {}_\infty J_\nu^*(\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda + \sum_{\mu=1}^{s} e^{-iT(\lambda_\mu-\lambda_\nu)}\ {}_\infty J_\nu^*(\lambda_\mu) =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{s} e^{-iT(\lambda_\mu-\lambda_\nu)}\ {}_\infty J_\nu^*(\lambda_\mu) + o(1). \quad (27)$$

When $T \to \infty$ the left member of (26)

$$(H_{1T}^{(\nu)}(\lambda),\ 1) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{1T}^{(\nu)}(\lambda)\, dG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} H_{1T}^{(\nu)}(\lambda)\, f(\lambda)\, d\lambda + \sum_{\mu=1}^{s} H_{1T}^{(\nu)}(\lambda_\mu) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iT(\lambda-\lambda_\nu)} \frac{\left[\Psi_\nu(\lambda) - \dfrac{|\Psi_\nu(\lambda)|^2}{\Psi_\nu(\lambda)}\right]}{\lambda-\lambda_\nu}\, d\lambda + \sum_{\mu=1}^{s} H_{1T}^{(\nu)}(\lambda_\mu) = \sum_{\mu=1}^{s} H_{1T}^{(\nu)}(\lambda_\mu) + o(1). \quad (28)$$

From (26) — (28) it follows that

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{\mu=1}^{s} H_{1T}^{(\nu)}(\lambda_\mu) - \sum_{\mu=1}^{s} e^{-iT(\lambda_\mu-\lambda_\nu)}\ {}_\infty J_\nu^*(\lambda_\mu) = 0, \quad (29)$$

i. e.

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{\mu=1}^{s} e^{-iT(\lambda_\mu-\lambda_\nu)} [J_\nu(\lambda_\mu) - {}_\infty J_\nu^*(\lambda_\mu)] = 0, \quad (30)$$

or

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{\mu=1}^{s} e^{-iT\lambda_\mu} [J_\nu(\lambda_\mu) - {}_\infty J_\nu^*(\lambda_\mu)] = 0. \quad (31)$$

Using a theorem of almost periodic functions (see for example [10]) from (31) we conclude that

$$J_\nu(\lambda_\mu) = {}_\infty J_\nu^*(\lambda_\mu);\ \mu = 1, 2, \ldots, s. \quad (32)$$

But

$$H_{1T}^{(\nu)}(\lambda_\mu) - H_{1T}^{(\nu)}(\lambda_\mu)^* = e^{-iT(\lambda_\mu-\lambda_\nu)}[J_\nu(\lambda_\mu) - {}_TJ_\nu^*(\lambda_\mu)]. \tag{33}$$

Hence

$$\lim_{T\to\infty}|H_{1T}^{(\nu)}(\lambda_\mu) - H_{1T}^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*| = \lim_{T\to\infty}|J_\nu(\lambda_\mu) - {}_TJ_\nu^*(\lambda_\mu)| = 0. \tag{34}$$

Similarly it can be shown that

$$\lim_{T\to\infty}|H_{3T}^{(\nu)}(\lambda_\mu) - H_{3T}^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*| = 0. \tag{35}$$

From (25′) (34), (35) our lemma follows immediately.

Now by definition of $m_T^{(\nu)}$, (See (22′)) we know

$$\begin{pmatrix} \mathrm{E}\, m_T^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathrm{E}\, m_T^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_T^{(1)}(\lambda_1)^* & \dots & H_T^{(1)}(\lambda_s)^* \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ H_T^{(s)}(\lambda_1)^* & \dots & H_T^{(s)}(\lambda_s)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_s \end{pmatrix}.$$

In general the estimate

$$m_T = \begin{pmatrix} m_T^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ m_T^{(s)} \end{pmatrix}$$

is not an unbiased estimate of γ. If the matrix $[H_T^{(\nu)}(\lambda_\varkappa)^*]$; $1 \leqslant \nu,\ \mu \leqslant s$ is nonsingular then the estimate

$$M_T = [H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]^{-1} m_T \tag{36}$$

will be a linear unbiased estimates of γ. In fact, we can show that for sufficient large T, the matrix $[H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]$ is nonsingular. Now, let us consider the asymptotic behavior of the elements $H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)$ of this matrix when $T \to \infty$.

From (21) we obtain

$$H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu) = \begin{cases} \dfrac{e^{-iT(\lambda_\mu-\lambda_\nu)}\dfrac{1}{\Psi_\nu(\lambda_\mu)} - e^{iT(\lambda_\mu-\lambda_\nu)}\dfrac{1}{\Psi_\nu(\lambda_\mu)}}{\lambda_\mu - \lambda_\nu} = O(1), & (\mu \neq \nu), \\ \dfrac{2T}{i\Psi_\nu(\lambda_\nu)} + O(1), & (\mu = \nu). \end{cases} \tag{37}$$

Using (37), by lemma 5, we get

$$H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^* = \begin{cases} O(1), & (\mu \neq \nu) \\ \dfrac{2T}{i\Psi_\nu(\lambda_\nu)} + O(1), & (\mu = \nu) \end{cases} \tag{38}$$

which assures that the matrix $[H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]$ is nonsingular for sufficient large T.

Lemma 6. *Estimate M_T is the Markov estimate of γ.*

Proof. When $|t| \leqslant T$ we have (by (36), (23))

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}\, M_T^{(1)}\overline{x(t)} \\ \vdots \\ \mathbf{E}\, M_T^{(s)}\overline{x(t)} \end{pmatrix} = [H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{E}\, m_T^{(1)}\overline{x(t)} \\ \vdots \\ \mathbf{E}\, m_T^{(s)}\overline{x(t)} \end{pmatrix} =$$

$$= [H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]^{-1} \left[\begin{pmatrix} H_T^{(1)}(\lambda_1) - H_T^{(1)}(\lambda_1)^*, & \dots, & H_T^{(1)}(\lambda_s) - H_T^{(1)}(\lambda_s)^* \\ \vdots & & \vdots \\ H_T^{(s)}(\lambda_1) - H_T^{s}(\lambda_1)^*, & \dots, & H_T^{(s)}(\lambda_s) - H_T^{(s)}(\lambda_s)^* \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} e_T^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & e_T^{(s)} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e^{-it\lambda_1} \\ \vdots \\ e^{-it\lambda_s} \end{pmatrix}.$$

By theorem 3, lemma is proved.

Theorem 5. *Under the conditions* (A), (B) *and* (C), *we have*

$$\lim_{T\to\infty} 2T\, \mathbf{E}\,({}_0C_T - \gamma)\,\overline{({}_0C_T - \gamma)}' = 2\pi \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_s) \end{pmatrix}. \tag{40}$$

Proof. From (39), by theorem 3 we get

$$2T\, \mathbf{E}\,({}_0C_T - \gamma)\,\overline{({}_0C_T - \gamma)}' =$$

$$= 2T\,[H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]^{-1} \left\{ [H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu) - H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]_{1\leqslant \nu,\, \mu \leqslant s} + \begin{pmatrix} e_T^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & e_T^{(s)} \end{pmatrix} \right\}.$$

When $T \to \infty$ by (24), (25) the matrix

$$[H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu) - H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*] + \begin{pmatrix} e_T^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & e_T^{(s)} \end{pmatrix} \to -2\pi i \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Psi_s(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

While, by (38) the matrix

$$2T\,[H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*]^{-1} = \left[\frac{1}{2T} H_T^{(\nu)}(\lambda_\mu)^*\right]^{-1} \to \begin{pmatrix} \dfrac{1}{i\Psi_1(\lambda_1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{i\Psi_s(\lambda_s)} \end{pmatrix}^{-1} = i \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \Psi_s(\lambda_s) \end{pmatrix}.$$

Hence

$$\lim_{T\to\infty} 2T\,\mathrm{E}\,({}_0C_T - \gamma)\,\overline{({}_0C_T - \gamma)}' = 2\pi \begin{pmatrix} \Psi_1(\lambda_1)^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \psi_s(\lambda_s)3 \end{pmatrix} = 2\pi \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

which proves the theorem.

The set of conditions (A) — (C) required in the above theorem can be replaced by another set of conditions which are given directly in terms of spectral density $F'(\lambda) = f(\lambda)$. Although it is far from necessary it is sufficient for our purpose.

Suppose that

(A_1) the stationary residual $x(t)$ is purely non-deterministic, i. e. spectral density $f(\lambda)$ satisfies the following inequality

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\log f(\lambda)|}{1+\lambda^2}\,d\lambda < +\infty.$$

(B_1) the derivative $f'(\lambda)$ of the function $f(\lambda)$ exists and is continuous in a certain neighbourhood of $\lambda = \lambda_\nu$, $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ moreover $f(\lambda_\nu) > 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$.

(C_1) there exists a δ-neighbourhood of λ_ν such that $\log\frac{f(\lambda)}{f(x)} = \theta_\nu(\lambda, x)(\lambda - x)$, whenever $\lambda_\nu - \delta \leqslant \lambda \leqslant \lambda_\nu + \delta$, $\lambda_\nu - \delta \leqslant x \leqslant \lambda_\nu + \delta$ where $\theta_\nu(\lambda, x)$ is a function of two variables λ and x such that its partial derivative $\frac{\partial}{\partial x}\theta_\nu(\lambda, x)$ is a continuous function of λ and x in the above δ-neighbourhood.

Then we can show that the conditions (A), (B) and (C) are satisfied. To do this, we use the Krein's construction [11] (see also [12])

$$\varphi(\omega) = e^{G(\omega)},$$

where

$$G(\omega) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda\omega}{\lambda-\omega}\,\frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda.$$

Let

$$\varphi(x) = \lim_{y\to 0-} \varphi(x+iy).$$

Then we know that $\varphi(x)$ is quadratically integrable in $(-\infty, \infty)$ with

$$|\varphi(x)|^2 = f(x) = F'(x)$$

and that the function $g(a)$ defined by

$$g(a) = \text{l. i. m.}_{A\to\infty}\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-A}^{A} e^{iax}\varphi(x)\,dx$$

vanishes for $a < 0$.

If we can prove that the function $\varphi(x)$ is differentiable at points $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ then the functions

$$\Psi_\nu(\lambda) = \frac{\overline{\varphi(\lambda_\nu)}}{|\varphi(\lambda_\nu)|}\varphi(\lambda), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

evidently satisfy all the requirements of conditions (B) and (C).

Now

$$G(x+iy) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda(x+iy)}{\lambda-(x+iy)} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda(x+iy)}{\lambda-(x+iy)} \frac{\log \frac{f(\lambda)}{f(x)}}{1+\lambda^2} d\lambda + \frac{1}{2}\log f(x).$$

By (C_1), we have

$$G(x) = \lim_{y\to 0^-} G(x+iy) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda x}{\lambda-x} \frac{\log \frac{f(\lambda)}{f(x)}}{1+\lambda^2} d\lambda + \frac{1}{2}\log f(x)$$

and

$$\varphi(x) = e^{G(x)}.$$

To prove the differentiability of $\varphi(x)$ at points λ_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ we need only to show the function

$$G^*(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+\lambda x}{\lambda-x} \frac{\log \frac{f(\lambda)}{f(x)}}{1+\lambda^2} d\lambda$$

is differentiable at points λ_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$.

For $x \in \left(\lambda_\nu - \frac{\delta}{2},\ \lambda_\nu + \frac{\delta}{2}\right)$, we have

$$G^*(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda_\nu-\delta}^{\lambda_\nu+\delta} \frac{1+\lambda x}{1+\lambda^2}\theta_\nu(\lambda, x)\, d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_\nu|>\delta} \frac{1+\lambda x}{\lambda-x} \frac{\log \frac{f(\lambda)}{f(x)}}{1+\lambda^2} d\lambda. \qquad (41)$$

By (C_1) the first term of the right side of above equality is evidently a differentiable function. Letting $g_2^*(\lambda, x)$ be the integrand of the second integral in the right side of above equality, we see that

$$\frac{\partial}{\partial x} g_2^*(\lambda, x) = \frac{1}{(\lambda-x)^2}\log\frac{f(\lambda)}{f(x)} - \frac{1+\lambda x}{1+\lambda^2}\frac{f'(x)}{f(x)}\frac{1}{\lambda-x}.$$

Hence the second term of the right side of (41) is also a differentiable function. Thus the differentiability of $G^*(x)$ at λ_ν is proved.

In particular, if $f(\lambda)$ is constant in certain neighbourhood of λ_ν, $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ and $f(\lambda_\nu) > 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ then it is easily seen that all the requirements of conditions (B_1), (C_1) are fulfilled. Thus we obtain the following corollary.

Corollary. *Suppose that the stationary residual $x(t)$ is purely non-deterministic. If the spectral density $f(\lambda)$ of the process $x(t)$ is constant in certain neighbourhood of $\lambda_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, s)$ and $f(\lambda_\nu) > 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ then theorem 5 holds true.*

By means of this corollary we can prove a more general theorem.

Theorem 6. *If the stationary residual $x(t)$ is purely non-deterministic and its spectral density $f(\lambda)$ is continuous at points λ_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ then*

$$\lim_{T\to\infty} 2T\,\mathbf{E}({}_0C_T - \gamma)\overline{({}_0C_T - \gamma)}' = 2\pi \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_s) \end{pmatrix}. \tag{42}$$

Proof. Suppose that $f(\lambda_\nu) > 0$, then for sufficiently small positive ε, we can find $\delta = \delta(\varepsilon)$ such that

$$0 < f(\lambda_\nu) - \varepsilon \leqslant f(\lambda) \leqslant f(\lambda_\nu) + \varepsilon, \quad (\lambda_\nu - \delta \leqslant \lambda \leqslant \lambda_\nu + \delta).$$

Put

$$f^*(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda_\nu) - \varepsilon, & \lambda_\nu - \delta \leqslant \lambda \leqslant \lambda_\nu + \delta, \ (\nu = 1, 2, \ldots, s) \\ f(\lambda), & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$f^{**}(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda_\nu) + \varepsilon, & \lambda_\nu - \delta \leqslant \lambda \leqslant \lambda_\nu + \delta, \ (\nu = 1, 2, \ldots, s) \\ f(\lambda), & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Consider the stationary residuals $x^*(t)$, $x^{**}(t)$ with spectral densities $f^*(\lambda)$ and $f^{**}(\lambda)$ respectively and denote their corresponding Markov estimate of γ by ${}_0C_T^*$ and ${}_0C_T^{**}$ respectively. Then it is evident that

$$\mathbf{E}({}_0C_T^{(\nu)*} - \gamma_\nu)\overline{({}_0C_T^{(\nu)*} - \gamma_\nu)} \leqslant \mathbf{E}({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)\overline{({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)} \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{E}({}_0C_T^{(\nu)**} - \gamma_\nu)\overline{({}_0C_T^{(\nu)**} - \gamma_\nu)}. \tag{43}$$

Using the above corollary, we obtain

$$2\pi[f(\lambda_\nu - \varepsilon)] \leqslant \varliminf_{T\to\infty} 2T \cdot \mathbf{E}({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)\overline{({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)} \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{T\to\infty} 2T \cdot \mathbf{E}({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)\overline{({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)} \leqslant 2\pi[f(\lambda_\nu) + \varepsilon].$$

Since ε is arbitrary, we have

$$\lim_{T\to\infty} 2T \cdot \mathbf{E}({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)\overline{({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)} = 2\pi f(\lambda_\nu). \tag{44}$$

Clearly, if $f(\lambda_\nu) = 0$, the above equality (44) also holds. To prove (42), it remains to show

$$\lim_{T\to\infty} 2T \cdot \mathbf{E}({}_0C_T^{(\nu)} - \gamma_\nu)\overline{({}_0C_T^{(\mu)} - \gamma_\mu)} = 0, \quad (\nu \neq \mu). \tag{45}$$

Suppose there exists sequence of numbers $T_i \to \infty$ such that

$$\lim_{T\to\infty} 2T_i \mathbf{E}({}_0C_{T_i}^{(\nu)} - \gamma_\nu)\overline{({}_0C_{T_i}^{(\mu)} - \gamma_\mu)} = h_{\nu\mu}. \tag{46}$$

From (4) we have the matrix inequality

$$2T_i\mathbf{E}\,({}_0C_{T_i}-\gamma)\,\overline{({}_0C_{T_i}-\gamma)}' \leqslant 2T_i\mathbf{E}\,({}_LC_{Ti}-\gamma)\,\overline{({}_LC_{Ti}-\gamma)}'. \tag{47}$$

Letting $i\to\infty$ by (44), (46), (47) and theorem 4, we have

$$\begin{Vmatrix} 2\pi f(\lambda_1) & h_{12} & \dots & h_{1s} \\ \overline{h}_{12} & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \overline{h}_{1s} & \cdot & \cdots & 2\pi f(\lambda_s) \end{Vmatrix} \leqslant \begin{pmatrix} 2\pi f(\lambda_1) & & & \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & 2\pi f(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

i. e. the matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -h_{12} & \dots & -h_{1s} \\ -\overline{h}_{12} & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -\overline{h}_{1s} & \cdot & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

is non-negative definite. Therefore

$$h_{\nu\mu}=0,\ (\nu\neq\mu).$$

This completes the proof of the theorem.

Theorems 4 and 6 tell us: if the regression is a trigonometric one then the least-squares estimate is asymptotically as good as the Markov estimate.

Поступила в редакцию
6.7.58.

REFERENCES

[1] U. Grenander, Stochastic processes and statistical inference, Ark. för mat., **I**, Nr. 17 (1950), 195—277.
[2] U. Grenander, On the estimation of regression coefficients in the case of an autocorrelated disturbance, Ann. Math. Stat., **25**, No. 2 (1954).
[3] U. Grenander, M. Rosenblatt, Regression analysis of time series with stationary residuals, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **40** (1954), 812—816.
[4] U. Grenander, M. Rosenblatt, Statistical analysis of stationary time series, John Wiley and Sons, New York (1957).
[5] M. Rosenblatt, On the estimation of regression coefficients of a vector-valued time series with a stationary residual, Ann. Math. Stat., **27** (1956), 99—121.
[6] M. Rosenblatt, Some regression problems in time series analysis, Proc. of 3rd Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob., **1** (1956), 165—186.
[7] B. v. Sz. Nagy, Spektarldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Berlin, 1942.
[8] А. М. Яглом, Введение в теорию стационарных случайных функций, Успехи матем. наук, **VII**, вып. 5(51) (1952), 3—158.
[9] K. Karhunen, Über linearen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ann. Acad. Sci. Fennicae, **I**, No. 37 (1947), 3—79.
[10] H. Bohr, Fastperiodische Funktionen, Berlin, Springer, 1932.
[11] М. Г. Крейн, Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, ДАН СССР, **46** (1945), 339—342.
[12] K. Karhunen, Über die Struktur stationaren zufälliger Funktionen, Ark. för mat., **I**, H. 2 (1950), 141—160.

ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ СО СТАЦИОНАРНЫМИ ОСТАТКАМИ

ЦЗЯН ЦЗЕ-ПЕЙ *(МОСКВА)*

(*Резюме*)

Пусть $y(t) = x(t) + m(t)$ — комплексный вероятностный процесс со средним значением $\mathbf{E}\, y(t) = m(t) = \sum_{\nu=1}^{s} \gamma_\nu \varphi_\nu(t)$ (где $\varphi_\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$ — заданные функции t, а γ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, s$ — неизвестные постоянные) и со стационарным остатком $x(t)$: $\mathbf{E}\,(x(u)\overline{x(v)}) = r(u-v)$. Требуется по конечному отрезку $-T \leqslant t \leqslant T$ одной реализации процесса $y(t)$ оценить вектор $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s\}$.

В рассматриваемом случае оценка вектора γ по методу наименьших квадратов, получаемая при помощи минимизации квадратичной формы

$$\int_{-T}^{T} \Big| y(t) - \sum_{\nu=1}^{s} c_\nu \varphi_\nu(t) \Big|^2 dt$$

равна

$$ {}_L C_T = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \int_{-T}^{T} y(t)\,\overline{\varphi_1(t)}\,dt \\ \vdots \\ \int_{-T}^{T} y(t)\,\overline{\varphi_s(t)}\,dt \end{pmatrix}, $$

где

$$\Phi = [\Phi_{\mu\nu}]_{1 \leqslant \mu,\ \nu \leqslant s},\quad \Phi_{\mu\nu} = \int_{-T}^{T} \overline{\varphi_\mu(t)}\,\varphi_\nu(t)\,dt.$$

Это оценка — несмещенная.

В § 2 настоящей работы доказывается, что в нашем случае существует наилучшая линейная несмещенная оценка ${}_0C_T$ (т. е. линейная несмещенная оценка с наименьшей дисперсионной матрицей).

В § 3 рассматривается асимптотическое поведение дисперсионных матриц $\mathbf{E}\,({}_LC_T - \gamma)\,\overline{({}_LC_T - \gamma)}'$ и $\mathbf{E}\,({}_0C_T - \gamma)\,\overline{({}_0C_T - \gamma)}'$ (штрих означает эрмитово-сопряженную матрицу). Если (*i*) стационарный процесс $x(t)$ является регулярным, (*ii*) функции $\varphi_\nu(t)$ — тригонометрические, (*iii*) спектральная плотность процесса $x(t)$ непрерывна в некоторых отдельных точках, то главные члены матриц $\mathbf{E}\,({}_LC_T - \gamma)\,\overline{({}_LC_T - \gamma)}'$ и $\mathbf{E}\,({}_0C_T - \gamma)\,\overline{({}_0C_T - \gamma)}'$ при $T \to \infty$ совпадают друг с другом. Другими словами, при выше упомянутых условиях доказывается асимптотическая эффективность оценки ${}_LC_T$ в классе линейных несмещенных оценок.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том IV И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ *Выпуск 4*
1959

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ВОЛНОВОДЫ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ И БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ В ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

М. Е. ГЕРЦЕНШТЕЙН и В. Б. ВАСИЛЬЕВ

§ 1. Введение и постановка задачи

В настоящей работе мы покажем, как с помощью геометрии Лобачевского удается получить точное решение радиотехнической задачи о статистически неоднородном волноводе — о волноводе (линии передачи) со случайными неоднородностями.

В современной радиотехнике волноводы (линии передачи) применяются для передачи высокочастотной энергии от антенны к приемнику, от передатчика к антенне. При использовании радиоволн дециметрового и сантиметрового диапазонов длина линии передачи значительно превышает длину волны. В последнее время ведутся работы по созданию волноводных линий связи длиной в десятки километров.

Волноводом называется цилиндр с произвольной формой основания и металлическими стенками [1]. Электромагнитное поле в волноводе $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ удовлетворяет системе линейных уравнений Максвелла и линейным граничным условиям на стенках. Направим ось z по оси цилиндра. В силу линейности уравнений Максвелла поле в регулярном волноводе может быть представлено в виде суммы нормальных волн [2].

$$\left\{\begin{array}{c}\mathbf{E}(z,\xi,\zeta,t)\\ \mathbf{H}(z,\xi,\zeta,t)\end{array}\right\}=\sum_n\left\{\begin{array}{c}\mathbf{E}_n(\xi,\zeta)\\ \mathbf{H}_n(\xi,\zeta)\end{array}\right\}\left(C^+e^{ik_nz}+C^-e^{-ik_nz}\right)e^{i\omega t},$$

где ω — круговая частота возбуждаемых колебаний. Поля $\mathbf{E}_n$ и $\mathbf{H}_n$ (где ξ, ζ координаты в плоскости, ортогональной оси z) удовлетворяют двухмерным «мембранным» уравнениям:

$$\Delta_{\xi,\zeta}\left\{\begin{array}{c}\mathbf{E}_n(\xi,\zeta)\\ \mathbf{H}_n(\xi,\zeta)\end{array}\right\}+\gamma^2_n\left\{\begin{array}{c}\mathbf{E}_n(\xi,\zeta)\\ \mathbf{H}_n(\xi,\zeta)\end{array}\right\}=0,$$

где γ^2_n — собственное значение: $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma^2_n=\infty$. Волновые числа k_n определяются из уравнения

$$k_n^2=(\omega/c)^2-\gamma_n^2,$$

где c — скорость света. Распространяющимся волнам соответствуют вещественные k_n, число которых конечно. C^+ есть амплитуда волны, распространяющейся в положительном направлении оси z, C^- — волны, бегущей в отрицательном направлении.

Амплитуды C^+ и C^- определяются условиями возбуждения и нарушениями регулярности в волноводе.

Поток энергии, передаваемый по волноводу в положительном направлении, равен

$$P_+=\sum_n\left\{|C_n^+|^2-|C_n^-|^2\right\}.$$

Мы ограничимся рассмотрением системы с одной распространяющейся волной, так

как именно этот случай представляет наибольший интерес*. Отношение амплитуд отраженной и прямой волн:

$$r = C^-/C^+ \tag{1}$$

называется коэффициентом отражения [3].

Обычно в радиотехнике вместо коэффициента отражения пользуются коэффициентом стоячей волны напряжения (КСВН):

$$\text{КСВН} = \frac{1+|r|}{1-|r|}; \quad |r| = \frac{\text{КСВН}-1}{\text{КСВН}+1}$$

КСВН является основной характеристикой волноводного устройства. Если $|r|$ и КСВН велики — волновое устройство плохо согласовано, — то возникает ряд осложнений: передаваемая мощность уменьшается из-за наличия обратной волны, отраженная волна приводит к неустойчивой работе генератора, растут потери. При использовании волновода для передачи информации наличие отраженных волн приводит к искажению передаваемого сигнала.

Реальный волновод содержит большое число неоднородностей. Эти неоднородности могут быть конструктивными (изгибы, фланцы), а также могут быть вызваны неточностями изготовления. Коэффициент отражения одиночной неоднородности обозначим r_i.

После сделанных предварительных определений сформулируем задачу: Пусть заданы r_i, как независимые случайные функции с известными статистическими характеристиками. Требуется найти статистические характеристики полного коэффициента отражения всего устройства R.

В настоящей работе мы покажем, что задача о статистически неоднородном волноводе сводится к задаче о броуновском движении на плоскости Лобачевского.

§ 2. Взаимодействие неоднородностей

Нам необходимо найти полный коэффициент отражения от многих неоднородностей. Рассмотрим сначала более простой случай двух неоднородностей.

Пусть имеется какая-либо неоднородность, физическая природа которой нас не интересует (рис. 1). Важно только, что на неоднородность падают волны (с амплитудами a) и от нее отражаются волны (с амплитудами b).

Выберем плоскости отсчета фазы T_1 и T_2. В силу линейности уравнений Максвелла и граничных условий к ним, имеет место линейное соотношение для амплитуд a, b

$$\begin{aligned} b_1 &= S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \\ b_2 &= S_{21}a_1 + S_{22}a_2 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} a_1 &= C^+ \\ b_1 &= C^- . \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь S_{ik} — элементы матрицы рассеяния

$$\hat{S} = \left\| \begin{matrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{matrix} \right\|. \tag{3}$$

Мы рассматриваем только пассивные неоднородности без потерь, удовлетворяющие теореме взаимности, для которых матрица рассеяния S будет симметричной и унитарной [3], следовательно:

$$S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = -e^{2i\beta}; \quad S_{12} = S_{21}; \quad S_{22} = -S_{11}^* e^{2i\beta}. \tag{4}$$

Элементы матрицы рассеяния имеют следующий физический смысл: $S_{11} = r_1$ — коэффициент отражения со стороны генератора, S_{22} — коэффициент отражения со стороны нагрузки (в этом легко убедиться, сравнивая (1) и (3) и полагая поочередно $a_1 = 0$, $a_2 = 0$), элемент S_{12} связывает волны по обе стороны неоднородности и называется коэффициентом пропускания.

---

* В прямоугольном волноводе $k_1^2 > 0$, $k_s^2 < 0$, $s \geqslant 2$ все высшие типы волн не распространяются. В круглом волноводе, работающем на слабо затухающей волне H_{01} [2] принимаются меры, препятствующие распространению лишних типов волн.

Из формул (4) видно, что матрица рассеяния S неоднородности полностью определяется комплексным коэффициентом отражения $S_{11} = r = x + iy$ и углом β. Фаза коэффициента отражения r зависит от выбора плоскостей отсчета T фаз падающей и отраженной волн. При переносе плоскости отсчета фазы коэффициент отражения пересчитывается по закону

$$r(z) = r(z')\, e^{2ik_n(z-z')}, \tag{5}$$

где z, z' старые и новые положения плоскостей отсчета.

Единичный круг на r-плоскости называется диаграммой импедансов [3]. Поскольку $|r| \leqslant 1$, то произвольному коэффициенту отражения соответствует точка импеданс-диаграммы, которую мы будем называть изображающей.

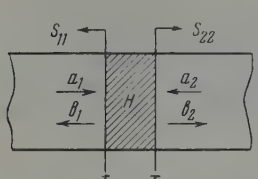

Рис. 1

Рассмотрим теперь взаимодействие двух известных неоднородностей (рис. 2). Первую неоднородность удобно характеризовать полной матрицей рассеяния S и только в окончательном результате воспользоваться формулами (4). Вторая неоднородность характеризуется коэффициентом отражения.

Подсчитаем суммарную амплитуду волн, приходящих к генератору от обеих неоднородностей.

Волна, отраженная непосредственно на первой неоднородности, имеет амплитуду $S_{11}a_1$, по определению коэффициента отражения.

Амплитуда волны, отраженной от второй неоднородности, будет $a_1 S_{12}^2 r_2 e^{2i\alpha}$. Здесь учтено ослабление первичной волны на первой неоднородности (по определению коэффи-

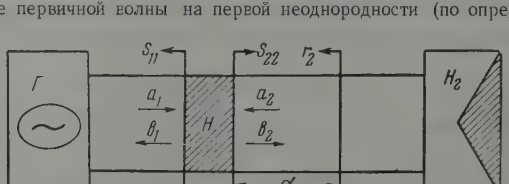

Рис. 2

циента пропускания S_{12}) и набег фазы α между плоскостями T_2 и T_3. Кроме того, к генератору бегут волны, испытавшие многократные отражения от обеих неоднородностей [11].

Суммируя эти отражения, получаем ряд:

$$a_1 S_{11} + a_1 S_{12}^2 e^{2i\alpha} r_2 + a_1 S_{12}^2 e^{4i\alpha} r_2 r_2 S_{22} + \ldots =$$

$$= a_1 S_{11} + \frac{a_1 S_{12}^2 e^{2i\alpha} r_2}{1 - S_{22} r_2 e^{2i\alpha}} = \frac{S_{11} - \left(S_{11} S_{22} - S_{12}^2\right) e^{2i\alpha} r_2}{1 - S_{22} r_2 e^{2i\alpha}}, \tag{6}$$

сходящийся внутри круга $|S_{22} r_2| < 1$. Воспользовавшись формулами (1), (4), для результирующего коэффициента отражения получаем:

$$r_{\text{сум}} = \frac{r_1 + r_2 e^{2i(\alpha+\beta)}}{1 + r_1^* r_2 e^{2i(\alpha+\beta)}}. \tag{7}$$

Формула (7) дает «закон сложения» двух неоднородностей. Комплексное число $r_2 e^{2i(\alpha+\beta)}$ можно назвать коэффициентом отражения второй неоднородности, пересчитанным в точку расположения первой неоднородности.

Из формулы (7) видно, что модуль результирующего коэффициента отражения зависит от разности аргументов слагаемых r_1, r_2 и полного набега фаз $\alpha + \beta$. В наиболее неблагоприятном случае, когда $r_2 e^{2i(\alpha+\beta)} = \lambda r_1$, ($\lambda$—вещественно) получаем наибольшее

значение суммарного коэффициента отражения:

$$|r_{\text{сум}}|_{\text{макс}} = \frac{|r_1| + |r_2|}{1 + |r_1 r_2|}. \tag{8}$$

В этом случае четыре точки: центр импеданс-диаграммы, r_1, $r_2 e^{2i(\alpha+\beta)}$, $r_{\text{сум}}$ лежат на одной прямой. Из (8) следует, что в наиболее неблагоприятном случае КСВН перемножаются

$$\text{КСВН}_{\text{сум}} = \text{КСВН}_1 \times \text{КСВН}_2, \tag{8}$$

а следовательно, логарифмы КСВН складываются.

Вблизи центра единичного круга коэффициентов отражения на r-плоскости (при $|r_1| \ll 1$; $|r_2| \ll 1$)

$$r_{\text{сум}} \cong r_1 + r_2 e^{2i(\alpha+\beta)}, \tag{9}$$

т. е. справедлив векторный закон сложения коэффициентов отражения, который обычно используется при исследовании статистически неоднородного тракта [12,13,14]. Применение векторного закона сложения означает пренебрежение многократными отражениями и ослаблением первичной волны, вследствие отражений *.

§ 3. Диаграмма импедансов, как модель плоскости Лобачевского

Если характеристики всех неоднородностей оказались бы известны, то их влияние можно было бы учесть последовательным применением формулы (7). При этом влияние каждой новой неоднородности (при движении от нагрузки к генератору) приводит к дробно-линейному преобразованию единичного круга коэффициентов отражения.

Легко проверить, пользуясь формулой (7), что если $|r_2| = 1$ (вторая неоднородность представляет идеально-отражающую поверхность), то $|r_{\text{сум}}| = 1$. Следовательно, единичная окружность при дробно-линейном преобразовании (7) сохраняется. Группа дробнолинейных преобразований, сохраняющих единичный круг, соответствует модели Пуанкаре плоскости Лобачевского [4]. Поэтому движение изображающей точки на импеданс-диаграмме можно рассматривать как движение на плоскости Лобачевского. Необходимо выяснить связь между коэффициентом отражения и координатами на плоскости Лобачевского. В конце § 2 было указано, что при движении вдоль прямой логарифмы КСВН складываются. Следовательно $\ln(1+|r|)/(1-|r|)$ пропорционален неевклидову расстоянию точки на плоскости от начала координат. Множитель пропорциональности определяется предельным переходом $|r| \to 0$, при котором неевклидово расстояние должно переходить в обычное. Полярными координатами в плоскости Лобачевского будут

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1+|r|}{1-|r|}; \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg}\, y/x; \tag{9}$$

x, y — являются бельтрамиевыми координатами [4] $r = |r|\, e^{i\varphi} = x + iy$, $|r| = \sqrt{x^2+y^2}$. При взаимодействии нескольких неоднородностей изображающая точка блуждает по плоскости Лобачевского, а геометрическая сумма соответствующих неевклидовых расстояний будет отвечать суммарному влиянию учтенных неоднородностей. Отметим, что результат) нескольких конечных движений на плоскости Лобачевского, как и на любой поверхности с отличной от нуля кривизной, вообще говоря, зависит от порядка слагаемых.

При малых коэффициентах отражения кривизной плоскости Лобачевского можно пренебречь и, в соответствии со сказанным в § 2, справедлив векторный закон сложения.

---

* Учет многократных отражений и ослабления падающей волны проведен в работах [14, 15] другим методом.

§ 4. Непрерывный случайный процесс

В дальнейшем мы будем случайный процесс считать непрерывным, т. е. предполагать, что отдельные элементарные отражения бесконечно малы, а число их бесконечно велико. Именно этот случай представляет для нас наибольший интерес, так как полностью случайными (не поддающимися точному учету) оказываются в основном неоднородности с малым коэффициентом отражения, обусловленные технологическими неточностями, а число их обычно достаточно велико. Тем самым мы предполагаем справедливость предельных теорем для распределения вероятностей [5, 10].

Академиком А. Н. Колмогоровым показано [6], что для величин, участвующих в непрерывном случайном процессе, плотность вероятности $w(z, \omega, \gamma_1, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial z} = DLw, \tag{10}$$

где D — статистическая характеристика волновода, которую мы полагаем заданной, L—дифференциальный оператор второго порядка, подлежащий еще определению. Должно быть выполнено условие нормировки:

$$\int w\, d\sigma = 1, \tag{11}$$

ось z направлена от нагрузки к генератору, $d\sigma$ — элемент объема в пространстве γ_1, φ.

Найдем теперь неизвестный оператор L. В работе Колмогорова даются формулы для его вычисления. Однако эти формулы достаточно громоздки, поэтому удобнее воспользоваться следующими косвенными физическими соображениями.

1. Инвариантность. Дифференциальное уравнение (10) справедливо для любого диффузионного процесса. Его вид не должен, разумеется, зависеть от граничных условий, которые в нашем случае означают подключение к волноводу оконечных нагрузок с различными r. Следовательно, уравнение (10) не должно меняться при дробно-линейных преобразованиях (7). Конечно, это физическое соображение не является математически строгим доказательством, такое доказательство приведено в работе [10].

2. Возможность выполнения условия нормировки. Рассмотрим сначала первое условие, Единственным дифференциальным оператором, удовлетворяющим условию инвариантности является оператор $\Delta + \lambda$ (с точностью до независящего от γ_1, φ множителя D, написанного отдельно),

$$\Delta = \operatorname{div} \cdot \operatorname{grad}.$$

Пространственное дифференцирование производится согласно метрике рассматриваемой поверхности [7], λ—постоянная.

Из условия нормировки следует, что $\lambda = 0$.

Действительно, согласно (11)

$$\frac{\partial}{\partial z} \int w d\sigma = 0.$$

Заменяя здесь $\partial w/\partial z$ с помощью (10), имеем]

$$\int DLw d\sigma = D \int \Delta w\, d\sigma + D\lambda \int w d\sigma = 0.$$

«Объемный» интеграл $\int \Delta w d\sigma$ может быть преобразован в «поверхностный» и равен нулю, отсюда

$$\frac{\partial}{\partial z} \int w d\sigma = D\lambda \int w d\sigma = 0, \quad \lambda = 0.$$

Следовательно искомое уравнение будет

$$\frac{\partial w}{\partial z} = D\, \Delta w = D \operatorname{div} \operatorname{grad} w. \tag{12}$$

Вблизи центра импеданс-диаграммы, где $x^2 + y^2 \ll 1$, получаем уравнение диффузии для суммы случайных векторов, известное из теории Броуновского движения [5].

$$\frac{\partial w}{\partial z} = D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \tag{13}$$

Из уравнения (13) можно выяснить физический смысл D.

Действительно, вычисленное с помощью распределения Релея, удовлетворяющего (13), среднее значение r: $|\overline{r^2}| = 4Dz$. Отсюда, используя определение $|\overline{r^2}|$ и независимость r_i, получим

$$D = \sum |r_i^2|/4z,$$

т. е. D — четверть погонной суммы квадратов модулей элементарных коэффициентов отражения.

Основное уравнение (12) допускает следующую наглядную интерпретацию: для плотности вероятности имеет место уравнение неразрывности [7], [8]:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \qquad \mathbf{j} = -D \operatorname{grad} w, \tag{14}$$

где $\mathbf{j}$ — поток плотности вероятности.

Выпишем уравнение (12) в явном виде.

В полярных координатах метрический тензор имеет вид:

$$\|g_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2\eta \end{Vmatrix}; \qquad \begin{aligned} ds^2 &= d\eta^2 + \operatorname{sh}^2\eta\, d\varphi^2, \\ d\sigma &= \operatorname{sh}\eta\, d\eta\, d\varphi. \end{aligned} \tag{15}$$

Оператор Δ может быть выражен через метрический тензор

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g} \cdot g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

Используя (12), (15), для плотности вероятности получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{D}\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\operatorname{th}\eta}\frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2\eta}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \tag{16}$$

С помощью подстановки

$$u = \operatorname{th}\eta; \quad d\sigma = du\, d\varphi \tag{17}$$

перейдем к уравнению с алгебраическими коэффициентами

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left[(u^2-1)\frac{\partial w}{\partial u}\right] + \frac{1}{u^2-1}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}. \tag{18}$$

Здесь введена безразмерная переменная

$$t = \int D dz.$$

§ 5. Функция Грина

Известно, что решение всякого линейного уравнения можно выразить через функцию Грина, которая является частным решением уравнения с δ-образными начальными (граничными при $t = 0$) условиями. δ-образному граничному условию соответствует нагрузка с известными коэффициентами отражения.

Пусть к волноводу подключена согласованная нагрузка. Именно этот случай представляет наибольший практический интерес, так как приемник или антенну на конце волновода стараются согласовать как можно лучше.

Переход к произвольной нагрузке производится дробно-линейным преобразованием.

Граничное условие, соответствующее согласованной нагрузке, будет

$$w(0, u, \varphi) = \delta(u - 1). \tag{19}$$

Коэффициент отражения согласованной нагрузки равен нулю, фаза не определена и, следовательно, любая фаза равновероятна.

Фундаментальное решение уравнения (16) при граничном условии (19) будет [10]:

$$w(\tau_1, t) = \frac{e^{-t/4}}{(2\pi t)^{3/2}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{x e^{-\frac{x}{4t}}}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} \eta}}\, dx. \qquad (20)$$

Приведем также другое выражение для решения в виде контурного интеграла ($p = \nu(\nu+1)$):

$$w(u, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} Q_\nu(u)\, e^{pt}\, dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\nu} Q_\nu(u)\, e^{\nu(\nu+1)t}\, (2\nu+1)\, d\nu, \qquad (21)$$

контур интегрирования на p-плоскости представляет собой прямую, параллельную мнимой оси, а на ν-плоскости — гиперболу с асимптотами, образующими с действительной осью углы, равные $\pm 45°$. Здесь $Q_\nu(u)$ — функции Лежандра второго рода

$$Q_\nu(u) = \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\theta^2)^\nu}{(u-\theta)^{\nu+1}}\, d\theta. \qquad (22)$$

§ 6. Средние значения

Используя интегральное выражение для решения, легко вычислить среднее значение u:

$$\bar{u} = \int_1^\infty u\, w du = \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty u\, du \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}\, dp \frac{1}{2^{\nu+1}} \int_{-1}^{+1} \frac{(1-\theta^2)^\nu}{(u-\theta)^{\nu+1}}\, d\theta. \qquad (23)$$

Изменим порядок интегрирования; сначала выполняем интегрирование по u, затем по θ и, наконец, по p [16]. Производя вычисления, получаем:

$$\bar{u} = e^{2t}. \qquad (24)$$

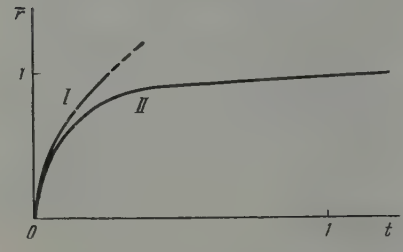

Рис. 3

Перейдем обратно к старой переменной r. Используя (9) и (17), получим

$$|r| = |r(u)| = \operatorname{th}\tau_1 \sqrt{1 - \frac{1}{u^2}}.$$

Для физической дискуссии результатов удовлетворимся приближением, в котором $|\bar{r}| \cong |r(\bar{u})|$. Это означает, что мы берем среднее значение $|r|$ и пренебрегаем дисперсией.

Тогда с помощью (24) найдем искомую зависимость $|\bar{r}|$ от длины волновода t:

$$|\bar{r}| \cong \sqrt{1 - e^{-4t}}.$$

При малых t имеем

$$|\bar{r}| \cong 2\sqrt{t}; \qquad t \ll \frac{1}{2}.$$

На графике (рис. 3) представлены две кривые. Кривая I выражает зависимость r от t, вычисленную в линейном приближении, т. е. исходя из векторного закона сложения отражений (9), которому соответствует уравнение (13).

Кривая II получена с помощью точного закона сложения (7). Из графика видно, что при $t < \frac{1}{8}$ обе кривые почти совпадают. Для достаточно «длинных» в смысле обилия малых неоднородностей $\left(t > \frac{1}{4}\right)$ волноводов линейное приближение вообще перестает решать физическую задачу. Кривая II идет ниже, чем кривая I. Это объясняется тем, что часть рассеянной на неоднородностях энергии волны в результате многократных отражений попадает в нагрузку. Однако она попадет в нагрузку с некоторым запазды-

ванием и может наложиться на последующий сигнал, что приводит к так называемым перекрестным искажениям сигнала.

Мощность, отраженная на неоднородностях к генератору, $\sim|r^2|$, а попадающая в нагрузку $1-|\overline{r^2}| \cong e^{-4t}$. Следовательно, достаточно «длинный»волновод без потерь с согласованной нагрузкой на конце отражает практически всю приходящую мощность.

§ 7. Волновод с потерями

В реальной линии существенную роль могут играть потери в результате поглощения энергии волны в стенках. Поэтому большой интерес представляет расчет волновода с потерями. Для вывода дифференциального уравнения случайного процесса удобнее всего использовать развитое в § 4 наглядное представление (формула (14)).

Из формулы переноса для коэффициента отражения (5) следует

$$|r(z)| = |r(0)|\, e^{-2k''z},$$

(где k''— постоянная затухания).

Следовательно, упорядоченные скорости изображающих точек направлены к центру и равны $-2k''r$. Это эквивалентно потоку частиц к центру плотностью

$$\mathbf{j} = -2k''\mathbf{r}^\circ \cdot w,$$

где $\mathbf{r}^\circ$—единичный вектор вдоль радиуса импеданс-диаграммы. В уравнении неразрывности (12) появится дополнительный член, учитывающий этот поток:

$$\partial w/\partial z = D \operatorname{div}\operatorname{grad} w + 2k''\operatorname{div} \mathbf{r}w.$$

Если при построении операторов пространственного дифференцирования использовать метрику гиперболической геометрии, то будут учтены нелинейные эффекты, возникающие при многократных отражениях и ослаблении первичной волны.

Таким образом, задача о суммировании случайных коэффициентов отражения сводится к уравнению диффузии на плоскости Лобачевского. При этом используются два свойства коэффициентов отражения:

а) суммарный коэффициент отражения двух неоднородностей выражается дробно-линейной функцией коэффициентов отражения каждой неоднородности;

б) существует предельный коэффициент отражения $|r| = 1$. Условия а) и б) встречаются в других физических задачах. Так, например, закон сложения скоростей в специальной теории относительности тоже выражается дробно-линейной формулой и существует предельная скорость, равная скорости света. Следует ожидать, что метод уравнения диффузии в трехмерном пространстве Лобачевского окажется полезным для ррелятивистских задач теории вероятностей [9].

Поступила в редакцию
25. 12. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] Рамо и Уинери, Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, 1948.
[2] Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, «Советское радио», 1957.
[3] Теория линий передач сверхвысоких частот, «Советское радио», 1951.
[4] Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, Гостехтеоретиздат, 1953.
[5] Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, 1947.
[6] А. Н. Колмогоров, Успехи математических наук, вып. V, 1938.
[7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, Гостехиздат, 1948.
[8] М. А. Леонтович, Статистическая физика, Гостехиздат, 1944.
[9] В. А. Фок, Теория пространства, времени, тяготения, ГИТТЛ, 1955, § 17.
[10] Ф. И. Карпелевич, В. Н. Тутубалин, М. Г. Шур, Предельные теоремы для композиций распределений в плоскости и пространстве Лобачевского, Теория вероян. и ее примен., **IV**, 4 (1959), 432.
[11] М. Е. Герценштейн, Л. Н. Брянский, Погрешности ослабителя вследствие рассогласования в тракте СВЧ, Измерительная техника, № 1 (1956), 28.

[12] М. А. Исакович, Рассеяние звуковых волн на малых неоднородностях в волноводе, Акуст. журнал, 3,1 (1957).
[13] J. A. Mullen, W. L. Protchard, The statistical prediction of VSWR, IRE Trans. MTT, 2 (1957), 127.
[14] В. И. Беспалов, А. В. Гапонов, Влияние малых неоднородностей на распространение электромагнитных волн в периодических структурах, Радиотехн. и электроника, I, 6 (1956), 772.
[15] В. И. Беспалов, К вопросу о флюктуациях параметров некоторых линейных систем, ДАН СССР, 117, 2 (1957), 209.
[16] М. Е. Герценштейн, В. Б. Васильев, Диффузионное уравнение для статистически неоднородного волновода, Радиотехн. и электроника, IV, 4 (1959), 611.

WAVEGUNIDE WITH THE RANDON NONHOMOGENEITIES AND BROWNIAN MOTION ON THE LOBACHEVSKY'S PLANE

M. E. GERZENSHTEIN and V. B. VASILJEV (MOSCOW)

(Summary)

It has been shown that the probability density for the continuous random process of the resultant of independent values which are «sumed up» according to the fractional-linear law satisfies the diffusion equation of Lobachevsky' plane. Green's function of the diffusion equation, which apparently is a new distribution, has been found.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КОМПОЗИЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВЕ ЛОБАЧЕВСКОГО

Ф. И. КАРПЕЛЕВИЧ, В. Н. ТУТУБАЛИН, М. Г. ШУР

1. Некоторые задачи физики сводятся к изучению поведения «сумм» независимых случайных величин со значениями в однородном пространстве. Например, задача о радиоволноводе со случайными неоднородностями, рассмотренная М. Е. Герценштейном и В. Б. Васильевым [1], приводит к изучению «сумм» независимых случайных величин со значениями на плоскости Лобачевского. Каждая неоднородность в радиоволноводе характеризуется коэффициентом отражения z, где z — комплексное число, $|z| < 1$, причем можно считать z случайной величиной с равномерно распределенным аргументом. Суммарная характеристика двух неоднородностей с коэффициентами z_1 и z_2 определяется «суммой» коэффициентов

$$z_1 \oplus z_2 = \frac{z_1 + z_2}{1 + \bar{z}_1 z_2}, \tag{1}$$

характеристика трех неоднородностей есть $(z_1 \oplus z_2) \oplus z_3$ и т. д. Коэффициенты z_i можно считать независимыми. Возникает вопрос о поведении «суммы» n коэффициентов отражения при $n \to \infty$.

Формула (1) определяет движение θ_{z_1} плоскости Лобачевского (имеется в виду модель Пуанкаре), переводящее начало координат O в точку z_1. Это движение является параллельным переносом по геодезической, соединяющей O и z_1.

В пространстве Лобачевского (моделью его является открытый единичный шар, на котором действует группа проективных преобразований, переводящих шар в себя) также можно ввести параллельный перенос по геодезической θ_x, переводящий центр шара O

в точку x. В прямоугольной системе координат X, Y, Z, с началом в точке O и осью OX, проходящей через точку x, это движение записывается формулами:

$$X' = \frac{X+\lambda}{1+\lambda X},\quad Y' = \frac{Y\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda X},\quad Z' = \frac{Z\sqrt{1-\lambda^2}}{1+\lambda X},$$

где $(\lambda, 0, 0)$ — координаты точки x в системе X, Y, Z. Положим $x \oplus y = \theta_x y$, где x и y — точки пространства Лобачевского. Если $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$, $\omega \in \Omega$ — случайные величины со значениями в пространстве или на плоскости Лобачевского (Ω -- пространство элементарных событий) такие, что определены вероятности $\mathbf{P}(\xi_1 \in \Gamma_1,\ \xi_2 \in \Gamma_2)$ для любых борелевских множеств Γ_1 и Γ_2, то «суммой» ξ_1 и ξ_2 назовем случайную величину

$$\xi_1 \oplus \xi_2(\omega) = \theta_{\xi_1(\omega)}\xi_2(\omega).$$

Пусть $\mathbf{P}(\xi_1 \in \Gamma) = \mu_1(\Gamma)$, $\mathbf{P}(\xi_2 \in \Gamma) = \mu_2(\Gamma)$ и ξ_1 и ξ_2 независимы. Композицией мер μ_1 и μ_2 назовем распределение $\mu_1 * \mu_2$ случайной величины $\xi_1 \oplus \xi_2$:

$$\mu_1 * \mu_2(\Gamma) = \int \mu_1(\theta_x^{-1}\Gamma)\,\mu_2(dx)$$

(интеграл берется по пространству или плоскости Лобачевского).

Назовем меру μ симметричной, если $\mu(h\Gamma) = \mu(\Gamma)$ для любого вращения h вокруг начала координат O и любого борелевского множества Γ. Отметим, что, вообще говоря, мера $\mu_1 * \mu_2$ не совпадает с мерой $\mu_2 * \mu_1$. Однако, если меры μ_1 и μ_2 симметричны, то меры $\mu_1 * \mu_2$ и $\mu_2 * \mu_1$ также симметричны и совпадают между собой. В дальнейшем будут рассматриваться только симметричные меры. Всякой симметричной мере μ соответствует мера $\hat{\mu}$ на полупрямой $[0, \infty)$: если A — борелевское множество на $[0, \infty)$, то $\hat{\mu}(A) = \mu\{x;\ \rho(O, x) \in A\}$, где $\rho(O, x)$ неевклидово расстояние между точкой x и началом координат O.

С последовательностью симметричных мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ связана цепь Маркова $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ с переходными вероятностями на n-ом шаге $P_n(x, \Gamma) = \mathbf{P}\{x_n \in \Gamma \mid x_{n-1} = x\} = \mu_n(\theta_x^{-1}\Gamma)$, $n = 1, 2, \ldots$. Цепь $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ инвариантна, т. е. $P_n(gx, g\Gamma) = P_n(x, \Gamma)$ при любом движении g плоскости (пространства) Лобачевского.

Очевидно,

$$\mu_1 * \mu_2 * \cdots * \mu_n(\Gamma) = \mathbf{P}\{x_n \in \Gamma \mid x_0 = 0\}.$$

Поэтому задача о предельном поведении «суммы» независимых случайных величин есть одновременно задача о предельном поведении вероятностей за n шагов $\mathbf{P}\{x_n \in \Gamma \mid x_0 = 0\}$.

2. Положим $\eta = \rho(O, x)$. В пространстве (плоскости) Лобачевского неевклидов объем (площадь) $m(E)$ имеет вид: $m(E) = \int_E s(\eta)\,d\eta d\sigma$, где $d\sigma$ — элемент поверхности (длины) единичной евклидовой сферы (окружности), а $s(\eta)$ — неевклидова площадь (длина) сферы (окружности) неевклидова радиуса η. Оператор Бельтрами — Лапласа на функциях, зависящих только от η, имеет вид: $\Delta = \frac{1}{s(\eta)}\frac{d}{d\eta}\left(s(\eta)\frac{d}{d\eta}\right)$. Для пространства Лобачевского $s(\eta) = \operatorname{sh}^2\eta$, для плоскости $s(\eta) = \operatorname{sh}\eta$. Зональными сферическими функциями (см. [2]) на плоскости или в пространстве Лобачевского называются собственные функции $\varphi(\eta)$ оператора Бельтрами — Лапласа Δ, зависящие только от η и нормированные условием $\varphi(0) = 1$. Для пространства Лобачевского зональные сферические функции даются формулой: $\varphi(\rho, \eta) = \frac{\sin\rho\eta}{\rho \operatorname{sh}\eta}$, а для плоскости $\varphi(\rho, \eta) = K_\rho(\operatorname{ch}\eta)$, где $K_\rho(x) = P_{-\frac{1}{2}+i\rho}(x)$, $P_n(x)$ — функция Лежандра 1-го рода, ρ — комплексное число. Собственное значение $\lambda = \lambda(\rho)$ оператора Δ на функции $\varphi(\rho, \eta)$ для пространства Лобачевского есть $\lambda(\rho) = -1 - \rho^2$, для плоскости $\lambda(\rho) = -\frac{1}{4} - \rho^2$.

3. Уравнение $\Delta u(\eta, t) = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ имеет решение

$$u(\eta, t) = \frac{1}{8\pi\sqrt{\pi}} e^{-t} \frac{\eta}{\operatorname{sh}\eta} \frac{1}{\sqrt{t^3}} e^{-\frac{\eta^2}{4t}} \geqslant 0$$

в пространстве Лобачевского и решение

$$u(\eta, t) = \frac{e^{-\frac{t}{4}}}{4\pi\sqrt{2\pi}\, t\sqrt{t}} \int_{\eta}^{\infty} \frac{x e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch}\eta}} dx \geqslant 0$$

на плоскости Лобачевского такие, что

$$\int u(\eta, t)\, s(\eta)\, d\tau_\sigma = 1$$

(интеграл берется по всему пространству или плоскости). Поэтому зависящая от параметра t функция $u(\eta, t)$ есть плотность (относительно инвариантной меры $m(E)$) некоторой вероятностной меры. Эту вероятностную меру мы назовем нормальной с параметром t. Нормальное распределение введено М. Е. Герценштейном как плотность вероятности перехода инвариантного относительно движений марковского процесса (броуновского движения) на плоскости или в пространстве Лобачевского.

4. Теорема 1. *Пусть $\varphi(\eta)$ — ограниченная зональная сферическая функция. Тогда*

$$\int \varphi(\eta)\, \mu_1 * \mu_2 (dx) = \int \varphi(\eta)\, \mu_1 (dx) \cdot \int \varphi(\eta)\, \mu_2 (dx),$$

где $\eta = \rho(O, x)$, μ_1 и μ_2 — симметричные меры.

Определение. Для конечной симметричной меры μ функцию

$$f(\rho) = \int \varphi(\rho, \eta)\, \hat{\mu}(d\eta),$$

где $\rho \geqslant 0$, будем называть характеристической функцией I рода (х. ф. I р.)

Для нормальной меры с параметром t х. ф. I р. есть $e^{\lambda t}$, где $\lambda = \lambda(\rho)$ — собственное значение функции $\varphi(\rho, \eta)$ $\Big($в случае пространства Лобачевского $\lambda(\rho) = -1 - \rho^2$, в случае плоскости $\lambda(\rho) = -\dfrac{1}{4} - \rho^2\Big)$. Если для двух симметричных мер х. ф. I р. равны, то эти меры совпадают.

Теорема 2. *Пусть μ_n — последовательность симметричных мер таких, что $\mu_n(L) \leqslant 1$ (L обозначает пространство или плоскость Лобачевского) и пусть их х. ф. I р. сходятся к функции $f(\rho)$. Тогда последовательность мер μ_n слабо сходится к некоторой мере μ, для которой функция $f(\rho)$ является х. ф. I р.; при этом $\mu(L) \leqslant 1$.*

Определение. Пусть $f(\rho)$ — х. ф. I р. меры μ. Функцию $g(\rho) = \dfrac{f(\rho)}{f(0)}$ назовем характеристической функцией второго рода (х. ф. II р.) меры μ.

Теорема 3. *Пусть последовательность $g_n(\rho)$ х. ф. II р. симметричных вероятностных мер μ_n сходятся к х. ф. II р. $g(\rho)$ вероятностной меры μ и пусть для какой-нибудь положительной функции $h(\eta)$, стремящейся к 0 при $\eta \to \infty$,*

$$\int_0^{\infty} h(\eta)\, \hat{\mu}_n (d\eta) \to \int_0^{\infty} h(\eta)\, \hat{\mu}(d\eta).$$

Тогда меры μ_n слабо сходятся к мере μ.

Определение. Назовем дисперсией меры μ

$$D(\mu) = -g''(\rho)\big|_{\rho=0} = -\frac{f''(0)}{f(0)}.$$

Можно показать, что $D(\mu_1 * \mu_2) = D(\mu_1) + D(\mu_2)$.
Для пространства Лобачевского:

$$D(\mu) = \frac{1}{3}\frac{\int \frac{\eta^3}{\operatorname{sh}\eta}\hat{\mu}(d\eta)}{\int \frac{\eta}{\operatorname{sh}\eta}\hat{\mu}(d\eta)},$$

для плоскости:

$$D(\mu) = \int\int\limits_{\eta\geqslant u\geqslant 0} \frac{u^2 du\hat{\mu}(d\eta)}{\sqrt{\operatorname{ch}\eta - \operatorname{ch}u}} : \int\int\limits_{\eta\geqslant u\geqslant 0} \frac{du\hat{\mu}(d\eta)}{\sqrt{\operatorname{ch}\eta - \operatorname{ch}u}}.$$

Дисперсия нормальной меры с параметром t равна $2t$.
Дисперсия любой конечной меры конечна.

5. Рассмотрим систему вероятностных симметричных мер $\mu_{n,r}$ $(1 \leqslant r \leqslant k_n$ $n = 1, 2, \ldots)$. Допустим, что $\int\limits_0^\tau d\hat{\mu}_{n,r} \to 1$ равномерно по r $(1 \leqslant r \leqslant k_n)$ для всякого $\tau > 0$ при $n \to \infty$. Положим

$$D_\tau(\mu) = \int\limits_{\eta>\tau} \frac{\eta^3}{\operatorname{sh}\eta}\hat{\mu}(d\eta)$$

для пространства Лобачевского и

$$D_\tau(\mu) = \int\int\limits_{\substack{\eta\geqslant u\geqslant 0 \\ \eta>\tau}} \frac{u^2 du\hat{\mu}(d\eta)}{\sqrt{\operatorname{ch}\eta - \operatorname{ch}u}}$$

для плоскости Лобачевского. Пусть для системы $\mu_{n,r}$

$$\sum_{r=1}^{k_n} D_\tau(\mu_{n,r}) \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

В таком случае имеет место теорема 4, аналогичная схеме серий.

Теорема 4. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{k_n} D(\mu_{n,r}) = 2c$, *то последовательность мер*

$$\zeta_n = \mu_{n,1} * \mu_{n,2} * \cdots * \mu_{n,k_n}$$

слабо сходится к нормальной мере с параметром c.

Пусть мера $\hat{\mu}$ такова, что $\int\limits_0^\infty \eta^2\hat{\mu}(d\eta) < \infty$. Определим меру $\hat{\mu}_\lambda$ равенством $\hat{\mu}_\lambda\left(\eta \leqslant \frac{\tau}{\lambda}\right) = \hat{\mu}(\eta \leqslant \tau)$, $\lambda > 0$. Если $\hat{\mu}_{n,r} = \hat{\mu}_{\sqrt{n}}$, $1 \leqslant r \leqslant n$, n — натуральное, а

$$\zeta_n = \mu_{n,1} * \mu_{n,2} * \cdots * \mu_{n,n} = \underbrace{\mu_{\sqrt{n}} * \ldots * \mu_{\sqrt{n}}}_{n \text{ раз}},$$

то для последовательности $\mu_{n,r}$ выполнены условия теоремы 4, причем $c = \frac{1}{2m}\int \eta^2 \hat{\mu}(d\eta)$, $m = 2$ в случае плоскости и $m = 3$ в случае пространства Лобачевского.

Поступила в редакцию
25.12.58

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Е. Герценштейн и В. Б. Васильев, Волноводы со случайными неоднородностями и броуновское движение в плоскости Лобачевского, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 4 (1959), 424—432.

[2] И. М. Гельфанд, Ф. А. Березин, Несколько замечаний к теории сферических функций, Труды Московского мат. о-ва, 5 (1956), 311—351.

LIMIT THEOREMS FOR THE COMPOSITIONS OF DISTRIBUTIONS IN THE LOBACHEVSKY'S PLANE AND SPACE

F. I. KARPELEVICH, V. N. TUTUBALIN, M. G. SHOUR (MOSCOW)

(*Summary*)

Some physical problems require the study of random variables (or measures) on the Lobachevsky's plane (space) L.

A Borel measure $\mu(\Gamma)$ is a symmetrical one if $\mu(h\Gamma) = \mu(\Gamma)$ for any Borel measurable set Γ and any rotation h around the origin of coordinates O. The composition $\mu_1 * \mu_2(\Gamma)$ of the symmetrical measures $\mu_1(\Gamma)$ and $\mu_2(\Gamma)$ is defined by the equation

$$\mu_1 * \mu_2(\Gamma) = \int_L \mu_1(\theta_x^{-1}\Gamma)\,\mu_2(dx),$$

where θ_x denotes any motion in L which transforms O into x, $\mu_1 * \mu_2(\Gamma)$ being equal to $\mu_2 * \mu_1(\Gamma)$.

For symmetrical measures the conception of a characteristic function is introduced. The characteristic functions of two measures are multiplied to get the characteristic function for the composition of this measures.

In the association of Borel probability measures there is a system of normal measures. If the set of symmetrical measures $\mu_{n,r}$ $(n \geqslant 1,\ 1 \leqslant r \leqslant k_n)$ satisfies some conditions analogous to the Lindeberg — Feller's ones, the sequence of the measures

$$\zeta_n = \mu_{n,1} * \cdots * \mu_{n,k_n}$$

is slightly converging to a normal measure.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Ю. К. БЕЛЯЕВ

1. Ниже будет изучаться довольно узкий класс случайных процессов, которые естественно называть аналитическими. Подобные процессы рассматривал Loéve [1], который дал некоторые достаточные условия аналитичности выборочных функций случайного процесса, не являющиеся естественными. Основным результатом настоящей работы является получение в терминах вторых моментов достаточных условий аналитичности выборочных функций случайного процесса. В случае гауссовских процессов эти условия являются также и необходимыми. Кроме того, рассмотрены некоторые задачи, связанные с аналитическими случайными процессами.

Через $\xi(t)$, $t \in T$ будем обозначать вещественный случайный процесс, заданный для значений $t \in T$, сепарабельный вместе со всеми своими производными, если таковые существуют. Как показал Дуб [2], всегда можно построить процесс, обладающий этим свойством и имеющий заданные n-мерные распределения. Кроме того, будем предполагать, что существуют вторые моменты $B(t, s) = \mathbf{M}\,\xi(t)\,\xi(s)$, которые называются ковариацией процесса. Для простоты в дальнейшем считаем, что $\mathbf{M}\,\xi(t) = 0$.

Можно рассматривать также n-мерные случайные процессы $\vec{\xi}(t) = \{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$, $t \in T$, накладывая на компоненты $\xi_i(t)$ те же ограничения и предполагая существование вторых моментов $\mathbf{M}\,\xi_i(t)\,\xi_j(t) = B_{ij}(t, s)$. В качестве T рассматривается отрезок или вся прямая.

Определение. Случайный процесс $\vec{\xi}(t)$ называется *аналитическим* в области D, если почти все выборочные функции его компонент допускают аналитическое продолжение в области D.

Так как случайный процесс $\eta(t)$, принимающий комплексные значения, представим в виде $\eta(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$, где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — вещественные случайные процессы, и так как для аналитичности $\eta(t)$ в области D необходимо и достаточно, чтобы $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ были аналитическими в той же области, то комплексный аналитический процесс можно рассматривать как двумерный аналитический случайный процесс.

Аналитические случайные процессы появляются в ряде случаев приближения одних случайных процессов с помощью других более простых случайных процессов. Так будет, в частности, в случае так называемого канонического представления процесса ([3]), когда функции, по которым ведется разложение процесса, являются аналитическими, а мы рассматриваем в качестве приближения к процессу конечное число членов канонического разложения. Приведем примеры аналитических случайных процессов.

1°. Многочлен N-ой степени со случайными коэффициентами

$$\xi_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \xi_n t^n.$$

2°. Тригонометрический многочлен N-ой степени со случайными коэффициентами

$$\xi_N(t) = \sum_{k=0}^{N} (\xi_n \cos nt + \eta_n \sin nt).$$

3°. Процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < +\infty$, имеющий своей ковариацией $B(t, s) = \sigma^2 e^{-\delta^2(t-s)^2}$.

4°. Процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < +\infty$, имеющий ковариацию вида $B(t, s) = \int_{-\omega}^{\omega} e^{i(t-s)\lambda} dF(\lambda)$.

Такие процессы называются случайными процессами с ограниченным спектром.

5°. Процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < +\infty$, у которого ковариация $B(t,s)$ — непрерывная функция, обладающая свойством

$$B(t, s) = B(t + s).$$

Если в первых двух примерах очевидно, что почти все выборочные функции являются аналитическими, то в остальных случаях положительный ответ дает приводимая ниже теорема 1.

2. Отметим, что из аналитичности случайного процесса $\xi(t)$ в окрестности точки t_0 следует представление для выборочных функций $\xi(t, \omega)$ этого процесса в виде ряда Тейлора со случайными коэффициентами:

$$\xi(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t_0, \omega) \frac{(t-t_0)^k}{k!},$$

где

$$a_k(t_0, \omega) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\Delta_h^{(k)} \xi(t_0, \omega)}{h^k}.$$

Отметим также, что из аналитичности случайного процесса, вообще говоря, не следует аналитичность моментов. Легко построить примеры, подтверждающие этот факт. Однако по вторым моментам можно иногда определить аналитичность процесса. Следующая теорема дает достаточные условия аналитичности процесса.

Теорема 1. *Пусть ковариация $B(t, s)$ — аналитическая функция двух переменных в окрестности точки (t_0, t_0), тогда случайный процесс аналитичен в окрестности этой точки.*

Для доказательства нам потребуется утверждение [1], состоящее в том, что, если ковариация процесса $B(t, s)$ имеет частные производные до порядка $2(n+1)$ включительно в некотором квадрате $[a, b] \times [a, b]$, то почти все выборочные функции процесса $\xi(t)$ дифференцируемы n раз на отрезке $[a, b]$. В нашем случае $B(t, s)$ бесконечно дифференцируема для $|t-t_0| < r$ и $|s-t_0| < r$, следовательно, почти все выборочные функции бесконечно дифференцируемы для $|t-t_0| < r$. Таким образом существуют $\xi^{(n)}(t, \omega) = \frac{d^n \xi(t, \omega)}{dt^n}$. Из условия аналитичности $B(t, s)$ следует, что

$$B(t, s) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \left. \frac{\partial^{k+l} B(t, s)}{\partial t^k \partial s^l} \right|_{t=s=t_0} \cdot \frac{(t-t_0)^k (s-t_0)^l}{k! l!}$$

для

$$|t-t_0| < r, \quad |s-t_0| < r.$$

Рассмотрим аналитические случайные процессы

$$\xi_n(t, \omega) = \sum_{k=0}^{n} \xi^{(k)}(t_0, \omega) \frac{(t-t_0)^k}{k!}.$$

Для них

$$\mathbf{M} |\xi(t) - \xi_n(t)|^2 = \sum_{k,l=n+1}^{\infty} \left. \frac{\partial^{k+l} B(t, s)}{\partial t^k \partial s^l} \right|_{t=s=t_0} \cdot \frac{(t-t_0)^{k+l}}{k! l!}. \tag{1}$$

Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{M} |\xi(t) - \xi_n(t)|^2 = 0,$$

так как справа в (1) стоит остаточный член сходящегося ряда. Отсюда

$$\xi(t) = \text{l.i.m.}_{n \to \infty} \xi_n(t), \tag{2}$$

где l.i.m. означает сходимость в среднем квадратичном.

Покажем теперь, что $\lim_{n \to \infty} \xi_n(t)$ существует с вероятностью единица. Для этого достаточно доказать, что с вероятностью единица $r_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \xi^{(k)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \to 0$ $(n \to \infty)$. Это будет

так, если $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{M}\, r_n^2(t) < \infty$. Напомним, что из сходимости степенного ряда следует его абсолютная сходимость в круге радиуса r, что степенный ряд можно дифференцировать почленно и что при этом радиус его круга сходимости не меняется.

Имеем

$$\mathbf{M}\,[r_n(t)]^2 = \sum_{k,l=n}^{\infty} \left.\frac{\partial^{k+l} B(t, s)}{\partial t^k \partial s^l}\right|_{t=s=t_0} \frac{(t-t_0)^{k+l}}{k!l!}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{M}\,[r_n(t)]^2 = \sum_{k,l=0}^{\infty} [\min(k, l)+1] \left.\frac{\partial^{k+l} B(t, s)}{\partial t^k \partial s^l}\right|_{t=s=t_0} \frac{(t-t_0)^{k+l}}{k!l!} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k,l=0}^{\infty} \left.\frac{\partial^{k+l} B(t, s)}{\partial t^k \partial s^l}\right|_{t=s=t_0} \left|\frac{|t-t_0|^{k+l}}{(k-1)!\,(l-1)!}\right| < \infty;$$

где сходимость последнего ряда следует из абсолютной сходимости ряда для $\dfrac{\partial^2 B(t, s)}{\partial t \partial s}$. Таким образом, $\widetilde{\xi}(t) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(t)$ существует с вероятностью единица и, следовательно, является аналитическим случайным процессом. Из (2) получаем, что при любом фиксированном t, $|t-t_0| < r$ с вероятностью единица

$$\xi(t) = \widetilde{\xi}(t), \tag{3}$$

а тогда (3) выполнено с вероятностью единица и для любого счетного всюду плотного в окрестности $\{t : |t-t_0| < r\}$ множества. Так как выборочные функции $\xi(t)$ и $\widetilde{\xi}(t)$ непрерывны, то равенство (3) справедливо с вероятностью единица и для всех t из этой окрестности. Теорема доказана.

Условие, сформулированное в теореме 1, является необходимым для гауссовских процессов.

Теорема 2. *Для того чтобы гауссовский процесс был аналитическим в окрестности точки t_0, необходимо и достаточно, чтобы его ковариация $B(t, s)$ была аналитической функцией в окрестности точки (t_0, t_0).*

Достаточность следует из предыдущей теоремы. Докажем необходимость. В силу аналитичности

$$\xi(t, \omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^{(k)}(t_0, \omega) \frac{(t-t_0)^k}{k!} \tag{4}$$

с вероятностью единица, а следовательно, и по вероятности при фиксированном t. Так как процесс гауссовский, то отсюда следует сходимость в среднем квадратичном. Таким образом

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \mathbf{M}\,\xi^{(k)}(t_0)\,\xi^{(l)}(t_0) \frac{(t-t_0)^{k+l}}{k!l!} < \infty.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} \mathbf{M}\,\xi^{(k)}(t_0)\,\xi^{(l)}(t_0) \frac{(t-t_0)^k \cdot (s-t_0)^l}{k!l!} < \infty,$$

а тогда, учитывая (4) и что $\mathbf{M}\,[r_n(t)]^2 \to 0$ при $n \to \infty$, получаем

$$B(t, s) = \mathbf{M}\,\xi(t)\,\xi(s) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \mathbf{M}\,\xi^{(k)}(t_0)\,\xi^{(l)}(t_0)\cdot\frac{(t-t_0)^k\,(s-t_0)^l}{k!l!},$$

т. е. $B(t, s)$ — аналитическая функция в окрестности (t_0, t_0). Теорема доказана.

Рассмотрим теперь стационарные случайные процессы. В этом случае следующая теорема дает критерий аналитичности ковариации.

Теорема 3. *Для того чтобы ковариация стационарного процесса* $B(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda}\,dF(\lambda)$ *была аналитической при,* $|\tau| < r$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{r\lambda}\,dF(\lambda) < \infty.$$

Доказательство очевидно.

Для стационарных в широком смысле случайных процессов справедливо следующее вытекающее из теоремы 1 следствие.

Следствие. *Если ковариация* $B(\tau)$ *стационарного случайного процесса аналитична при* $|\tau| < r$, *то почти все выборочные функции аналитичны в полосе* $|\operatorname{Im} t| < r$, $t = \tau + i\sigma$.

Заметим также, что так как в случае стационарного n-мерного процесса

$$\sum_{l=1}^{n} B_{ll}(\tau) = \sum_{l=1}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda}\,dF_{ll}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau\lambda}\,dF(\lambda) = B(\tau),$$

где $F(\Delta) = \sum_{l=1}^{n} F_{ll}(\Delta)$, то из аналитичности $B(\tau)$ следует аналитичность $B_{ll}(\tau)$. Поэтому достаточным условием аналитичности n-мерного процесса является аналитичность следа матрицы ковариаций $\|B_{ij}(\tau)\|$. В частности, отсюда следует, что для комплексного стационарного процесса $\eta(t) = \xi_1(t) + i\xi_2(t)$ достаточным условием для аналитичности является аналитичность его ковариации $B(t-s) = \mathbf{M}\,\eta(t)\,\eta(s)$.

Вернемся теперь к примерам аналитических процессов. В силу теоремы 1 для аналитичности случайного процесса достаточно аналитичности ковариации. В примерах 3° и 4° это условие выполнено. В примере 5° из положительной определенности и непрерывности $B(\tau)$, а также свойства, что $\Delta_h^{(2n)}B(\tau) = \mathbf{M}\left|\Delta_h^{(n)}\xi\left(\frac{\tau}{2}\right)\right|^2 \geqslant 0$ следует аналитичность $B(\tau)$ в полосе $z = \tau + i\sigma$, $\operatorname{Re} z \in (a, b)$, ([4]), где (a, b) интервал, в котором $B(\tau)$ непрерывна. Если предположить, что процесс $\xi(t)$, $-\infty < t < +\infty$ непрерывен в среднем квадратичном, то $B(t, s) = B(t+s)$ всюду непрерывна и, следовательно, является целой функцией. Таким образом в последнем примере мы имеем аналитический нестационарный процесс.

3. Перейдем к некоторым задачам, связанным с аналитическими случайными процессами. Как следует из предыдущего, для случайных процессов, у которых ковариации целые функции, почти все выборочные функции также целые. Интересно оценить порядок роста выборочных функций через ковариации.

Напомним, что целая функция $f(z)$ называется функцией экспоненциального типа с показателем не выше чем σ, если для любого $\varepsilon > 0$

$$|f(z)| \leqslant e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$$

для любых z с достаточно большим модулем. Необходимым и достаточным условием этого является выполнение неравенства [5]

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{f^{(n)}(0)} \leqslant \sigma.$$

Это условие будет выполнено тогда и только тогда, когда для всех достаточно больших n

$$| f^{(n)}(0) | \leqslant \sigma^n \varphi(n),$$

где $\varphi(n)$ такова, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\varphi(n)} \leqslant 1$.

Теорема 4. *Если ковариация стационарного процесса $B(\tau)$ — целая функция экспоненциального типа с показателем, не превышающим σ, то почти все выборочные функции — целые функции экспоненциального типа с показателем, не превышающим σ.*

Доказательство. Тот факт, что почти все выборочные функции будут целыми, получаем из следствия к теореме 1. Докажем остальные свойства. Нам достаточно доказать, что, начиная с некоторого $m_0 = m_0(\omega)$,

$$| \xi^{(m)}(0, \omega) | \leqslant \sigma^m \psi(m) \tag{5}$$

для почти всех ω, где $\psi(m)$ такова, что $\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\psi(m)} \leqslant 1$. Так как $\mathbf{M} | \xi^{(n)}(0) |^2 = B^{(2n)}(0)$, то в силу условия теоремы для $n \geqslant n_0$

$$\mathbf{M} | \xi^{(n)}(0) | \leqslant \sigma^{(2n)} \varphi(n),$$

где $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\varphi(n)} \leqslant 1$. Применяя неравенство Чебышева, получаем $\mathbf{P}\{ | \xi^{(n)}(0, \omega) | > \sigma^n \sqrt{\varphi(n)} \cdot n$ для хотя бы одного $n \geqslant n_0\} \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \mathbf{P}\{ | \xi^{(n)}(0, \omega) | > \sigma^n \sqrt{\varphi(n)} \cdot n\} \leqslant$

$\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\mathbf{M} | \xi^{(n)}(0) |^2}{\sigma^{2n} \varphi(n) n^2} < \infty$. Отсюда получаем, что для почти всех выборочных функций существует такое $m_0(\omega)$, что для всех $m > m_0(\omega)$ выполняется неравенство (5), где $\psi(m) = \sqrt{\varphi(m)} \cdot m$ и, следовательно, $\overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{\psi(m)} \leqslant 1$. Теорема доказана.

Эта теорема применима к случайным процессам с ограниченным спектром. Заметим, что вопросы такого рода тесно связаны со строгим обоснованием формулы Валле-Пуссена для выборочных функций стационарных случайных процессов с ограниченным спектром.

Теорема 5. *Пусть $\xi(t)$, $-\infty < t < \infty$ — процесс с ограниченным спектром ковариация которого имеет вид*

$$B(\tau) = \int_{-\widetilde{w}}^{\widetilde{w}} e^{i\tau\lambda}\, dF(\lambda). \tag{6}$$

Тогда для почти всех выборочных функций справедлива формула

$$\xi(t, \omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \xi\left(\frac{k\pi}{w}, \omega\right) \frac{\sin w\left(t - \frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t - \frac{k\pi}{w}\right)}, \tag{7}$$

где $w > \widetilde{w}$ — любое фиксированное число.

Эта формула часто встречается в литературе (например, [6], [7]). Однако строгого доказательства ее для выборочных функций случайных процессов с ограниченным спектром приведено не было.

Как известно (см., например, [8]), для $\lambda < w$

$$e^{i\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik\pi\frac{\lambda}{w}} \cdot \frac{\sin w\left(t - \frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t - \frac{k\pi}{w}\right)}.$$

Можно доказать, что для остатка этого ряда

$$R_n(t) = \sum_{|k|>n} e^{ik\pi\frac{\lambda}{w}} \frac{\sin w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)}$$

справедлива оценка

$$|R_n(t)| < \frac{C(t)}{n(w-\lambda)}, \quad C(t) = \frac{4w[2\pi + |t|\cdot w]}{\pi^2}.$$

Действительно, так как

$$e^{ik\pi\frac{\lambda}{w}} \frac{\sin w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)} + e^{-ik\pi\frac{\lambda}{w}} \frac{\sin w\left(t+\frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t+\frac{k\pi}{w}\right)} =$$

$$= \frac{\sin wt}{(wt)^2-(k\pi)^2}\left[2wt\cos k\pi\left(1-\frac{\lambda}{w}\right) - i2\pi k\sin k\pi\left(1-\frac{\lambda}{w}\right)\right],$$

то для любого фиксированного t при достаточно больших n получаем для действительной части $R_n(t)$

$$|\operatorname{Re} R_n(t)| < \frac{1}{n}\frac{4w|t|}{\pi^2}.$$

Для мнимой части $R_n(t)$, используя преобразование Абеля и ограниченность $\sum_{|k|<n} \sin k\pi\left(1-\frac{\lambda}{w}\right)$, получаем

$$|\operatorname{Im} R_n(t)| < \frac{1}{n}\cdot\frac{8}{\pi\left(1-\frac{\lambda}{w}\right)}.$$

Отсюда

$$s_n(t) = \sup_{-\widetilde{w}<\lambda<\widetilde{w}} \left| e^{it\lambda} - \sum_{-n}^{n} e^{ik\pi\frac{\lambda}{w}} \frac{\sin w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)} \right| < \frac{C(t)}{n\left(1-\frac{\widetilde{w}}{w}\right)}.$$

Применим это к доказательству формулы (7). Из (6) следует, что процесс представим в виде

$$\xi(t) = \int_{-\widetilde{w}}^{\widetilde{w}} e^{it\lambda}\,\Phi(d\lambda),$$

где $\Phi(\Delta)$ — случайная мера на прямой такая, что

$$\mathbf{M}\,\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)} = F(\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

Рассмотрим теперь процесс

$$\xi_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \xi\left(\frac{k\pi}{w}\right) \frac{\sin w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)} = \int_{-w}^{w}\left[\sum_{-n}^{n} e^{ik\pi\frac{\lambda}{w}} \frac{\sin w\cdot\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t-\frac{k\pi}{w}\right)}\right]\Phi(d\lambda).$$

Для него получаем

$$\mathbf{M} \mid \xi(t) - \xi_n(t) \mid^2 = \int_{\omega}^{w} \left| e^{it\lambda} - \sum_{-n}^{n} e^{tk\pi \frac{\lambda}{w}} \frac{\sin w\left(t - \frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t - \frac{k\pi}{w}\right)} \right|^2 dF(\lambda) \leqslant$$

$$\leqslant \mid s_n(t) \mid^2 b^2 \leqslant \frac{C(t)^2 \cdot b^2}{n^2 \left(1 - \frac{\tilde{w}}{w}\right)^2}, \quad (b^2 = \mathbf{M} \mid \xi(t) \mid^2). \tag{8}$$

Отсюда сразу следует, что формула (7) верна в среднем квадратичном. Заметим, что легко показать, что (7) верно в среднем квадратичном и при $\tilde{w} = w$. Из (8) для

$$\eta_{ln}(t) = \sum_{|k|>n} \xi\left(\frac{k\pi}{w}\right) \frac{\sin w\left(t - \frac{k\pi}{w}\right)}{w\left(t - \frac{k\pi}{w}\right)}$$

получаем

$$\sum_n \mathbf{M} \mid \eta_n(t) \mid^2 \leqslant \frac{C(t)^2}{\left(1 - \frac{\tilde{w}}{w}\right)^2} \cdot \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Таким образом, ряд, стоящий справа в (7), сходится с вероятностью единица при любом фиксированном t. Отсюда легко показать, что он сходится равномерно в любом ограниченном интервале изменения t. Обозначим $\tilde{\xi}(t) = \lim_{n\to\infty} \xi_n(t)$, тогда, так как $\xi(t) = \tilde{\xi}(t)$ с вероятностью единица при любом фиксированном t и так как выборочные функции $\xi(t)$ и $\tilde{\xi}(t)$ непрерывны, то получаем, что формула (7) справедлива при любом t. Что и требовалось доказать.

Оценим теперь скорость сходимости ряда в (7).

$$P\{\mid \eta_n(t) > f(n) \text{ хотя бы для одного } n \geqslant n_0\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n\geqslant n_0} \frac{\boldsymbol{M} \mid \eta_n(t) \mid^2}{f(n)^2} \leqslant \frac{C(t)^2}{\left(1 - \frac{\tilde{w}}{w}\right)^2} \sum_{n\geqslant n_0} \frac{1}{n^2 f(n)^2}.$$

Таким образом для того, чтобы с вероятностью единица существовало такое, $n_0 = n_0(\omega)$, что $\mid \eta_n(t, \omega) \mid < f(n)$ для всех $n > n_0(\omega)$ достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 f(n)^2} < \infty$. Отсюда получаем, что, например, для всех $n \geqslant n_0(\omega)$

$$\mid \eta_n(t, \omega) \mid < \frac{(\ln n)^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

Аналогичным способом можно показать, что для стационарных гауссовских процессов с ограниченным спектром, спектральные функции $F(\lambda)$ которых имеют непрерывные плотности, формула (7) справедлива для почти всех выборочных функций и при $\tilde{w} = w$.

4. Рассмотрим еще одну частную задачу. Как легко доказать необходимым и достаточным условием для того, чтобы аналитический процесс представлялся в виде $\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \cdot t^k$, где $M\xi_k\overline{\xi_l} = \sigma_k^2 \delta_{kl}$; $\delta_{kl} = 1$, $k = l$, $\delta_{kl} = 0$, $k \neq l$, является требование, что ковариация есть функция произведения своих аргументов, т. е.

$$B(t, s) = B(t \cdot s).$$

Таким образом процессы, допускающие разложение в ряды Тейлора с некоррелированными случайными коэффициентами, нестационарны. Назовем процесс $\xi(t)$ с ковариацией

$B(t, s)$ нормируемым до стационарного, если процесс $\eta(t) = \frac{\xi(t)}{\sqrt{B(t, t)}}$ стационарен в широком смысле.

Теорема 6. *В классе аналитических случайных процессов, допускающих разложение в ряды Тейлора со случайными некоррелированными коэффициентами, нормируем до стационарного только процесс, имеющий своей ковариацией*

$$B(t \cdot s) = \sigma^2 e^{-\delta^2 \cdot t \cdot s}. \tag{9}$$

Для этого, изучая функциональное уравнение

$$\frac{B(t \cdot s)}{\sqrt{B(t^2)\, B(s^2)}} = f(t - s),$$

доказываем, что аналитические решения этого уравнения имеют вид (9) и что других аналитических решений нет.

5. Среди других характерных свойств аналитических случайных процессов отметим следующее. Так как по сколь угодно малому участку выборочной функции стационарного аналитического процесса мы можем восстановить все значения выборочной функции, пользуясь методами аналитического продолжения, то для эргодических аналитических стационарных случайных процессов спектральная функция процесса определяется по сколь угодно малому участку выборочной функции. Так будет, в частности, для гауссовских стационарных процессов с ограниченным спектром, спектральные функции которых абсолютно непрерывны.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В. Я. Козлову, под руководством которого была написана дипломная работа, связанная с вышеизложенными вопросами, а также А. Н. Колмогорову за данные указания.

Поступила в редакцию
2. 6. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Loeve, Fonctions aléatoires de second ordre. (В книге P. Levy Processus stochastiques et mouvement Brownien, Paris, 1948).
[2] Д. Дуб, Вероятностные процессы, ИИЛ, 1956.
[3] В. С. Пугачев, Общая теория корреляции случайных функций, Изв. АН СССР, Сер. матем., **17**, 6 (1953).
[4] S. Bernstein, Sur les fonctions absolument monotones, Acta Math., **52**, 1—2 (1929), 1—66.
[5] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории апроксимации, Гостехиздат, 1947.
[6] А. А. Харкевич, Очерки общей теории связи, Гостехтеоретиздат, 1955.
[7] А. М. Яглом, Теория корреляции непрерывных процессов и полей с приложением к задаче о статистическом экстраполировании временных рядов и к теории турбулентности, Докторская диссертация, 1955.
[8] Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Гостехтеоретиздат, 1956.

ANALYTICAL RANDOM PROCESSES

Yu. K. BELJAEV (MOSCOW)

(Summary)

This paper is devoted to investigating the so-called analytical random processes. Random process $\xi(t)$ is called analytical in a region D if almost all its sample functions are analytical and possess an analytical continuation in the region D. Analycity of covariance function $B(t, s) = M\xi(t)\xi(s)$ in the neighbourhood of (t_0, t_0) is a sufficient condition for analycity of $\xi(t)$ in the neighbourhood of t_0. For Gaussian processes, this condition is also necessary. Some other problems connected with analytical processes are also investigated.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К РАБОТЕ В. Л. ГОНЧАРОВА «ИЗ ОБЛАСТИ КОМБИНАТОРИКИ»

В. И. БАБКИН, П. Ф. БЕЛЯЕВ, Ю. И. МАКСИМОВ

Пусть имеем последовательность N испытаний с двумя возможными исходами, которые мы обозначим A и B. Эту последовательность испытаний будем называть исходной. Выписывая в соответствующем порядке результаты испытаний, получим некоторую последовательность

$$x_1, x_2, \ldots, x_N, \tag{1}$$

где каждый из символов $x_1, x_2, \ldots, x_N$ принимает либо значение A, либо B.

Следуя Гончарову [1], назовем A-серией участок последовательности (1), состоящие из подряд идущих символов A и ограниченный с обеих сторон символами B. Число символов A, входящих в серию, назовем ее длиной. Аналогичным образом определим понятие B-серии.

Обозначим ν_i ($i = 1, 2, \ldots, k-1$) число A-серий длины i и ν_k число A-серий длины k и более ($k \geqslant 1$ некоторое фиксированное число) в последовательности (1).

Тогда совокупность чисел $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k$ может рассматриваться как некоторый случайный вектор, который обозначим $\bar{\nu}$.

Вопрос о распределении случайного вектора $\bar{\nu}$ рассматривался рядом авторов ([2], [1]), однако это рассмотрение ограничивалось случаем независимых испытаний.

В настоящей заметке рассматривается случай, когда исходная последовательность будет связана в простую однородную цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей не содержащей нулевых элементов.

В первом разделе показано, что при больших значениях N случайный вектор $\bar{\nu}$, после соответствующей нормировки, будет распределен асимптотически по нормальному закону.

Во втором разделе отыскивается матрица вторых моментов для вектора $\bar{\nu}$. В третьем разделе рассматривается возможность распространения полученных результатов на случай многозначной случайной последовательности.

Задача решается с помощью аппарата цепей Маркова. Возможность применения цепей Маркова для решения настоящей задачи была указана Гихманом [3].

§ 1. Асимптотическое распределение случайного вектора $\bar{\nu}$.

Запишем матрицу переходных вероятностей для исходной последовательности испытаний в виде:

$$\begin{Vmatrix} p_{AA} & p_{AB} \\ p_{BA} & p_{BB} \end{Vmatrix},$$

где p_{AB} означает условную вероятность появления в каком-либо испытании исхода B при условии, что в предыдущем испытании появился исход A. Аналогично определяются и другие элементы матрицы. При этом все элементы матрицы считаем отличными от нуля. С помощью исходной последовательности испытаний образуем производную последовательность испытаний. Для этого рассматриваем l-ое, $(l+1)$-ое, $\ldots$, $(l+k)$-ое испытания исходной последовательности, как одно испытание с 2^{k+1} возможными исходами. Если $l = 1, 2, \ldots, N-k$, то таким образом получим новую, производную последовательность испытаний.

Очевидно, что если исходная последовательность связана в простую однородную цепь Маркова, то производная последовательность также связана в простую однородную цепь Маркова. Используя терминологию, принятую в цепях Маркова, назовем исходы испытаний (как исходной, так и производной последовательности) состояниями.

Разобьем все возможные состояния производной последовательности на классы $L_1, L_2, \ldots, L_{k-1}, L_k, L_{k+1}$. К классу L_i ($i = 1, 2, \ldots, k-1$) отнесем все состояния, у которых на первом месте стоит символ B, на последующих i местах стоит символ A, на $(i+2)$-ом месте символ B, а на остальных $k-i-1$ местах символы произвольны. К классу L_k отнесем одно состояние, у которого на первом месте стоит символ B, а на всех остальных местах стоят символы A. К классу L_{k+1} отнесем все оставшиеся состояния.

Если обозначить n_i число испытаний производной последовательности, исходы которых принадлежат к классу L_i, то справедливо равенство:

$$\nu_i = n_i + \rho_i,\ 0 \leqslant \rho_i < k. \tag{2}$$

Так как мы рассматриваем лишь асимптотическое распределение вектора $\overline{\nu}$ при $N \to \infty$, а k — фиксированная величина, то вместо величин ν_i будем в дальнейшем рассматривать величины n_i.

Очевидно, что исходная последовательность образует нормальную цепь Маркова (см. [4], [5]). Легко видеть, что производная последовательность также образует нормальную цепь Маркова.

В [5] показано, что если цепь нормальна, то соответствующим образом нормированные частоты состояний этой цепи распределены асимптотически по многомерному нормальному закону. Таким образом, если обозначим $m_1, m_2, \ldots, m_{2^k+1}$ частоты состояний производной последовательности, то многомерная случайная величина

$$\left(\frac{m_1 - \mathbf{M}m_1}{\sqrt{\mathbf{D}m_1}}, \frac{m_2 - \mathbf{M}m_2}{\sqrt{\mathbf{D}m_2}}, \ldots, \frac{m_{2^k+1} - \mathbf{M}m_{2^k+1}}{\sqrt{\mathbf{D}m_{2^k+1}}}\right)$$

будет распределена асимптотически (при $N \to \infty$) по многомерному нормальному закону (вырожденному).

Так как

$$n_j = \sum_{i \in L_j} m_i;\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

то отсюда непосредственно следует, что многомерная случайная величина

$$\left(\frac{n_j - \mathbf{M}n_j}{\sqrt{\mathbf{D}n_j}}\right);\ j = 1, 2, \ldots, k$$

также распределена по многомерному нормальному закону (уже не вырожденному).

§ 2. Вычисление первых и вторых моментов случайной величины $\overline{\nu}$.

Пусть имеется некоторая последовательность N испытаний, связанных в простую однородную цепь Маркова с состояниями $C_1, \ldots, C_s$. Пусть далее $\| \pi_{ij} \|$ соответствующая матрица переходных вероятностей.

Если C_i и C_j — два любых состояния, а m_i и m_j — частоты этих состояний, то имеем следующее соотношение (см. [5])

$$\begin{gathered} \mathbf{M}m_i = N\pi_i, \\ \mathbf{D}m_i = N\pi_i(1 - \pi_i) + 2\pi_i \sum_{h=1}^{N-1} (N - h)(\pi_{ii}^{(h)} - \pi_i), \\ \operatorname{Cov}(m_i, m_j) = N\pi_i\pi_j + \sum_{h=1}^{N-1} (N - h)[\pi_i(\pi_{ij}^{(h)} - \pi_j) + \pi_j(\pi_{ji}^{(h)} - \pi_i)]. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{M}$ — математическое ожидание, $\mathbf{D}$ — дисперсия, Cov — ковариация (второй центральный смешанный момент) случайных величин m_i и m_j, π_i и π_j — предельные вероятности появления C_i и C_j, а $\pi_{ij}^{(h)}$ и $\pi_{ji}^{(h)}$ — соответствующие вероятности перехода за h шагов.

Применим формулы (3) для отыскания матрицы вторых моментов случайных величин $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}, n_k$.

Подсчитаем прежде всего $\operatorname{Cov}(n_{k-1}, n_i)$, где $i < k - 1$.

Введем следующие обозначения. Произвольное состояние, принадлежащее к классу L_i $(i < k)$, будем обозначать $\overline{i} = (i_1, i_2, \ldots, i_{k+1})$.

Здесь

$$i_j = \begin{cases} B \text{ при } j = 1,\ i + 2, \\ A \text{ при } j = 2, \ldots, i + 1 \\ A \text{ или } B \text{ при } j > i + 2. \end{cases}$$

так что $\overline{i} = (\underbrace{BAA\,,\,.\,.\,AB}_{i} i_{i+3}\,.\,.\,.\,i_{k+1})$ при $i < k-1$,

$$\overline{k-1} = (\underbrace{BAA\,,\,.\,.\,AB}_{k-1}),$$

$$\overline{k} = (\underbrace{BAA\,.\,.\,.\,A}_{k}).$$

Обозначим m_i, m_{k-1} частоты появления соответствующих состояний $\overline{i}$, $\overline{k-1}$.

Очевидно, что $\operatorname{Cov}(n_{k-1}, n_i) = \Sigma \operatorname{Cov}(m_{k-1}, m_i)$, где суммирование ведется по всем частотам m_i, соответствующим состояниям производной последовательности, принадлежащим к классу L_i. Учитываем, что к классу L_{k-1} относится одно состояние.

Таким образом для определения $\operatorname{Cov}(n_{k-1}, n_i)$ достаточно вычислить $\operatorname{Cov}(m_{k-1}, m_i)$, используя последнюю из формул (3).

Пусть далее $P(i)$, $P^{(h)}(i,\ k-1)$, $P^{(h)}(k-1,\ i)$ соответственно предельная вероятность появления состояния $\overline{i}$ и вероятности перехода из $\overline{i}$ в $\overline{k-1}$ и из $\overline{k-1}$ в $\overline{i}$ за h шагов.

Выпишем предельную и переходные вероятности

$$P(i),\quad P^{(h)}(i,\ k-1), P^{(h)}(k-1,\ i).$$

$$P(i) = p_B \cdot \mathcal{P}_i \cdot \mathcal{P}\,(i_{i+3}\,.\,.\,.\,i_{k+1}|B),\ \text{где}\ \mathcal{P}_i = p_{BA} p_{AA}^{i-1} p_{AB};\ i = 1,2,\ldots,k;$$

$\mathcal{P}(i_{i+3}\,.\,.\,.\,i_{k+1}|B)$ — условная вероятность появления комбинации $(i_{i+3}\,.\,.\,.\,i_{k+1})$ в исходной последовательности при условии, что $i_{i+2} = B$.

$$P^{(h)}(i,\ k-1) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant h \leqslant i, \\ p_{AA}^{i+s} p_{AB} \cdot \varepsilon_s, & h = i+s+1,\ 0 \leqslant s \leqslant k-i-2, \\ \mathcal{P}_{k-1} \cdot \varepsilon_{k-i-1}, & h = k, \\ p_{BB}^{(h-i-1)} \mathcal{P}_{k-1}, & h > k, \end{cases}$$

$$P^{(h)}(k-1,\ i) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant h < k, \\ \mathcal{P}_i \cdot \mathcal{P}\,(i_{i+3}\,.\,.\,.\,i_{k+1}|B), & h = k, \\ p_{BB}^{(h-k)} \cdot \mathcal{P}_i \cdot \mathcal{P}\,(i_{i+3}\,.\,.\,.\,i_{k+1}|B), & h > k, \end{cases}$$

где

$$\varepsilon_0 = \begin{cases} 0, \text{ если } i_{i+3} = \ldots = i_{k+1} = A, \\ 1 \quad \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$\varepsilon_s = \begin{cases} 0, \text{ если } i_{i+3}, \ldots, i_{i+s+1} \text{ произвольны,} \\ \qquad i_{i+s+2} = B,\ i_{i+s+3} = \ldots = i_{k+1} = A; \\ 1 \qquad \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь p_B, p_{BB}, p_{AB}, p_{BA}, p_{AA}, $p_{BB}^{(s)}$ означают предельную и соответствующие переходные вероятности за один шаг и за s шагов в исходной последовательности (1).

Таким образом

$$\operatorname{Cov}(m_{k-1},\ m_i) = -Np_B^2 \cdot \mathcal{P}_{k-1} \mathcal{P}_i \cdot \mathcal{P}\,(i_{i+3}\,.\,.\,.\,i_{k+1}|B) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{N-1} (N-h)\,\{P(k-1)\,[P^{(h)}(k-1,\ i) - P(i)] + P(i)\,[P^{(h)}(i,\ k-1) - P(k-1)]\}. \qquad (4)$$

Следовательно, используя формулу (4) и произведя соответствующие суммирования, получим в результате, что

$$\operatorname{Cov}(n_{k-1}, n_i) = -Np_B^2\mathcal{P}_i\mathcal{P}_{k-1} + (N-k)\,p_B\mathcal{P}_i\cdot\mathcal{P}_{k-1} +$$

$$+p_B\mathcal{P}_i\mathcal{P}_{k-1}\sum_{h=k+1}^{N-1}(N-h)p_{BB}^{(h-k)} - 2p_B^2\mathcal{P}_i\mathcal{P}_{k-1}\sum_{h-1}^{N-1}(N-h) +$$

$$+(N-i-1)\,p_B\mathcal{P}_i\mathcal{P}_{k-1} + p_B\mathcal{P}_i\mathcal{P}_{k-1}\sum_{h=i+2}^{N-1}(N-h)p_{BB}^{(h-i-1)}.$$

Нас интересуют лишь асимптотические выражения при больших N. Поэтому можно считать длину производной последовательности равной числу испытаний исходной последовательности и в выражении для $\operatorname{Cov}(n_{k-1}, n_i)$ ограничиться членами порядка N. Учитывая (2) и равенства

$$p_B = \frac{p_{AB}}{1-\delta},\quad p_A = \frac{p_{BA}}{1-\delta},\quad p_{BB}^{(h)} = p_B + p_A\delta^h,\ \delta = p_{BB} - p_{AB},$$

см. [5]), после простых преобразований окончательно получаем

$$\operatorname{Cov}(\nu_{k-1}, \nu_i) \cong -N\left\{p_B\mathcal{P}_i\mathcal{P}_{k-1}\left[(k+i+2)\,p_B - 2\right] - 2p_Bp_A\mathcal{P}_i\mathcal{P}_{k-1}\frac{\delta}{1-\delta}\right\}.$$

Полученное выражение для $\operatorname{Cov}(\nu_{k-1}, \nu_i)$ можно также рассматривать как выражение для произвольной ковариации

$$\operatorname{Cov}(\nu_j, \nu_i),\quad i < j \leqslant k-1$$

с заменой $k-1$ на j.

В самом деле, при подсчете $\operatorname{Cov}(\nu_j, \nu_i)$ без ограничения общности можно считать, что $k = j+1$.

Используя аналогичные рассмотрения, можно записать

$$\mathbf{M}\nu_i \cong Np_B\mathcal{P}_i;\quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$

$$D\nu_i \cong N\left\{p_B\mathcal{P}_i - p_B\mathcal{P}_i^2\left[(2i+3)\,p_B - 2\right] + 2p_Bp_A\mathcal{P}_i^2\cdot\frac{\delta}{1-\delta}\right\}.$$

Рассмотрим теперь последнюю компоненту вектора $\overline{\nu}$ — случайную величину ν_k. К классу L_k относится одно единственное состояние $\overline{k}$.

Подсчет величин $\mathbf{M}\nu_k$, $\mathbf{D}\nu_k$, $\operatorname{Cov}(\nu_k, \nu_i)$ $(i < k)$ отличается только некоторыми несущественными деталями от только что приведенного, поэтому мы его опускаем. Приведем только для справки необходимые при этом подсчете предельные и переходные вероятности и окончательный результат.

Учитывая введенные ранее обозначения, получим

$$P(k) = p_Bp_{BA}p_{AA}^{k-1},$$

$$P^{(h)}(k, k) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant h \leqslant k, \\ p_{AB}^{(h-k)}\cdot p_{BA}\cdot p_{AA}^{k-1}, & h > k, \end{cases}$$

$$P^{(h)}(k, i) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant h \leqslant k, \\ p_{AB}^{(h-k)}\cdot\mathcal{P}_i\cdot\mathcal{P}(i_{i+s}\ldots i_{k+1} \mid B), & h > k, \end{cases}$$

$$P^{(h)}(i, k) = \begin{cases} 0, & 1 \leqslant h \leqslant i, \\ p_{AA}^{i+s+1}\cdot\varepsilon_s, & h = i+s+1,\ 0 \leqslant s \leqslant k-i-2 \\ p_{BA}\cdot p_{AA}^{k-1}\cdot\varepsilon_{k-i-1}, & h = k, \\ p_{BB}^{(h-i-1)}\cdot p_{BA}\cdot p_{AA}^{k-1}, & h > k. \end{cases}$$

В результате имеем

$$\mathbf{M}\,\nu_k \cong N p_B p_{BA} p_{AA}^{k-1}.$$

$$\mathbf{D}\,\nu_k \cong N\left\{p_B p_{BA} p_{AA}^{k-1} - (2k+1)\,p_B^2 p_{BA}^2 p_{AA}^{2k+2} - 2p_B^2 p_{BA}^2 p_{AA}^{2k-2}\frac{\delta}{1-\delta}\right\}$$

$$\mathrm{Cov}\,(\nu_k, \nu_i) \cong -N\left\{p_B p_{BA} p_{AA}^{k-1}\mathcal{P}_i\,[(k+i+2)\,p_B - 1] + p_B p_{BA} p_{AA}^{k-1}\mathcal{P}_i\,(p_B - p_A)\,\frac{\delta}{1-\delta}\right\}.$$

Все выводы и рассмотрения проводились при некотором фиксированном k. От значения k зависит формирование производной последовательности и, следовательно, разбиение на классы $L_1, L_2, \ldots, L_k, L_{k+1}$.

Но при любом другом k построение производной последовательности и формирование классов $L_1, L_2, \ldots, L_k, L_{k+1}$ совершенно аналогично ранее сделанному. Поэтому все рассмотрения и выводы остаются без изменения.

Итак, первые и вторые моменты случайного вектора $\overline{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k\}$ можно записать в виде:

$$\mathbf{M}\,\nu_i \cong N p_B \cdot \mathcal{P}_i,\quad 1 \leqslant i < k,$$

$$\mathbf{M}\,\nu_k \cong N p_B \mathcal{P}_k,$$

$$\mathbf{D}\,\nu_i \cong N\left\{p_B\mathcal{P}_i - p_B\mathcal{P}_i^2\,[(2i+3)\,p_B - 2] + 2p_B p_A \mathcal{P}_i^2 \frac{\delta}{1-\delta}\right\},\quad 1 \leqslant i < k,$$

$$\mathbf{D}\,\nu_k \cong N\left\{p_B\mathcal{P}_k - p_B^2\mathcal{P}_k^2\,(2k+1) - 2p_B^2\mathcal{P}_k^2\frac{\delta}{1-\delta}\right\}, \qquad (5)$$

$$\mathrm{Cov}\,(\nu_i, \nu_j) \cong -N\left\{p_B\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j\,[(i+j+3)\,p_B - 2] - 2p_B p_A \mathcal{P}_i\mathcal{P}_j \frac{\delta}{1-\delta}\right\},\quad \begin{matrix} i \neq j \\ 1 \leqslant i,\ j < k, \end{matrix}$$

$$\mathrm{Cov}\,(\nu_i, \nu_k) \cong -N\left\{p_B\mathcal{P}_i\mathcal{P}_k\,[(k+i+2)p_B - 1] + p_B\,(p_B - p_A)\,\mathcal{P}_i\mathcal{P}_k\frac{\delta}{1-\delta}\right\},\quad 1 \leqslant i < k.$$

Здесь, как и раньше, $\mathcal{P}_s = p_{BA} p_{AA}^{s-1} p_{AB}$, $(s < k)$,

$$\mathcal{P}_k = p_{BA}\,p_{AA}^{k-1}.$$

Тем самым предельный закон распределения случайного вектора $\overline{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k\}$ полностью определен. Если теперь предположить, что введенная нами величина $\delta = p_{BB} - p_{AB}$ равна нулю, то это будет соответствовать случаю последовательности независимых испытаний с двумя исходами. В этом случае первая и третья из формул (5) совпадают с формулами работы Гончарова [1].

§ 3. Случай последовательности многозначных случайных величин

Понятие серии можно распространить и на случай последовательности испытаний, имеющих произвольное число m исходов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Будем опять называть эту последовательность исходной.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_N$ последовательность символов A_s, соответствующая результатам исходной последовательности испытаний. Назовем серией участок последовательности $\{x_n\}$, состоящий из одного и того же символа A_s $(s = 1, 2, \ldots, m)$ и ограниченный с обеих сторон символами, отличными от A_s. Число символов, входящих в серию, назовем длиной серии.

Введем снова в рассмотрение случайный вектор $\overline{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k\}$, где ν_i $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ — число серий длины i, а ν_k — число серий длины k и более в исходной последовательности.

Матрица вторых моментов для $\bar{\nu}$ довольно просто вычисляется, когда исходная последовательность связана в простую однородную цепь Маркова с циклической матрицей переходных вероятностей, т. е. с матрицей, имеющей вид:

$$\begin{Vmatrix} p_1 & p_2 & \cdot & \cdot & \cdot & p_m \\ p_m & p_1 & \cdot & \cdot & \cdot & p_{m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ p_2 & p_3 & \cdot & \cdot & \cdot & p_1 \end{Vmatrix}.$$

Для этого с помощью исходной последовательности образуем новую последовательность испытаний.

Будем рассматривать l-ое и $(l+1)$-ое испытания исходной последовательности как одно испытание с двумя возможными исходами. В качестве первого исхода будем рассматривать тот случай, когда исходы l-ого и $(l+1)$-го испытаний совпадают; в качестве второго — тот случай, когда исходы l-го и $(l+1)$-го испытаний не совпадают. Обозначим эти исходы соответственно A и B. Полагая l поочередно равным $1, 2, \ldots, N$, получим последовательность испытаний с исходами A и B. Эту последовательность назовем производной.

Легко видеть, что справедливы следующие два утверждения.

1) Если исходная последовательность испытаний связана в простую однородную цепь Маркова с циклической матрицей переходных вероятностей, то производная последовательность будет последовательностью независимых испытаний.

2) Число серий длины i в исходной последовательности либо равно числу A-серий длины $(i-1)$ в производной последовательности, либо отличается от него на 1. Под A-серией длины 0 в производной последовательности понимается пара рядом стоящих символов B.

Указанные обстоятельства позволяют свести вопрос об асимптотическом распределении серий в последовательности испытаний, связанных в простую однородную цепь Маркова с циклической матрицей переходных вероятностей и обладающих произвольным числом исходов, к вопросу о распределении A-серий в последовательности независимых однородных испытаний с двумя возможными исходами, т. е. к тому случаю, который рассмотрен в [1].

Поступила в редакцию
23.5.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Гончаров, Из области комбинаторики, Изв. АН СССР, сер. матем., 8, 1, (1944), 3.
[2] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения, ИИЛ, М., 1952.
[3] И. И. Гихман, О некоторых предельных теоремах для условных распределений и о связанных с ними задачах математической статистики, Укр. матем. журнал, 5, 4 (1953).
[4] А. Н. Колмогоров, Цепи Маркова со счетным множеством состояний, Бюлл. МГУ, I: 3 (1937).
[5] В. И. Романовский, Дискретные цепи Маркова, Гостехиздат, М.— Л., 1949.

SOME REMARKS ON GONCHAROV'S PAPER «FROM THE DOMAIN OF COMBINATORICS»

V. I. BABKIN, P. F. BELJAEV, Yu. I. MAKSIMOV (MOSCOW)

(Summary)

This note contains some results on the asymptotic distribution of the random vector $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k)$, where $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{k-1}, \nu_k$ are the numbers of A-series of lengths $1, 2, \ldots, k-1$ greater or equal to k, respectively, in the simple homogeneous Markov chain with two states A and B. The asymptotic distribution of the above-mentioned vector (when appropriately formed) is shown to be multivariate normal with the parameters of the distribution calculated.

Possible extensions for a number of states greater than two are also duscussed.

ОБ ОЦЕНКЕ СРЕДНЕГО В СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССАХ

С. Я. ВИЛЕНКИН

Одной из задач математической статистики случайных процессов является оценка математического ожидания случайного процесса $\mathbf{M}_\xi$ по его реализации на конечном интервале $0,T$. В том случае, когда в качестве оценки математического ожидания $\mathbf{M}_\xi$ принимается среднее арифметическое значение реализации процесса в фиксированные моменты времени

$$m_{N+1} = \frac{\sum_{i=0}^{N} \xi_i}{N+1},$$

где $\xi_0 = \xi(0)$, а $\xi_N = \xi(T)$, большое значение приобретает вопрос о числе фиксаций на интервале 0, T и о целесообразности перехода к среднеинтегральной оценке

$$m_T = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt.$$

Для оценки математического ожидания методом среднего арифметического имеет место следующая теорема:

Пусть случайный стационарный процесс обладает корреляционной функцией $R(\tau)$ с ограниченными производными до второго порядка включительно, которая удовлетворяет условию:

$$\int_0^T R(\tau)\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)d\tau > 0.$$

Тогда при определении оценки математического ожидания процесса $\mathbf{M}_\xi$ методом среднего арифметического по дискретной равномерной реализации на интервале 0, T всегда существует такое число точек $N < \infty$, которое обеспечивает минимум дисперсии оценки.

Доказательство. Не нарушая общности, можно положить, что дисперсия процесса

$$R(0) = \sigma_\xi^2 = 1; \qquad R(\tau) = \rho(\tau), \qquad \text{где } \rho(\tau) = \frac{R(\tau)}{\sigma_\xi^2}.$$

Тогда дисперсия оценки математического ожидания по дискретной реализации из $N+1$ точек

$$\sigma^2_{m_{N+1}} = \sum_{k=0}^{N} \frac{2}{N+1}\left(1-\frac{k}{N+1}\right)\rho\left(\frac{kT}{N}\right) - \frac{1}{N+1}. \tag{1}$$

Дисперсия оценки математического ожидания по непрерывной реализации

$$\sigma^2_{m_T} = \frac{2}{T}\int_0^T \rho(\tau)\left(1-\frac{\tau}{T}\right)d\tau. \tag{2}$$

Заменяя интеграл в выражении (2) интегральной суммой S_T^2, построенной по методу трапеций, найдем, что разность между S_T^2 и $\sigma^2_{m_{N+1}}$ равна

$$\Delta = \frac{1}{N+1}\left[S_T^2 - \frac{1}{N+1}S_T^2 - \frac{2}{N+1}\sum_0^N \rho\left(\frac{kT}{N}\right) + \frac{2}{N+1}\right].$$

Заметим, что разность между интегральной суммой, построенной по методу трапеций и величиной $\sigma^2_{m_T}$ при ограниченной производной второго порядка имеет порядок $\frac{C}{N}$.

Разность между средним значением корреляционной функции на интервале 0, T

$$\rho_{cpT} = \frac{1}{T}\int_0^T \rho(\tau)\,d\tau.$$

и величиной

$$\frac{1}{N+1}\sum_{0}^{N}\rho\left(\frac{kT}{N}\right)$$

имеет порядок $\frac{1}{N}$.

Следовательно,

$$\sigma^2_{m_T}-\sigma^2_{m_{N+1}}=\frac{2}{N+1}\left[\sigma^2_{m_T}-\rho_{\text{ср}_T}+O\left(\frac{1}{N}\right)\right]. \tag{3}$$

Для того чтобы среднеинтегральная оценка имела дисперсию большую, чем среднеарифметическая, достаточно выполнения неравенства

$$\sigma^2_{m_T}-\rho_{\text{ср}_T}>0. \tag{4}$$

Подставляя в (4) выражение (2) для $\sigma^2_{m_T}$ и выражение для $\rho_{\text{ср}_T}$, получим условие существования числа фиксаций N, обеспечивающего минимум дисперсии среднеарифметической оценки математического ожидания

$$\int_0^T\rho(\tau)\left(1-\frac{2\tau}{T}\right)d\tau>0.$$

При выборе шага фиксации λ целесообразно учитывать, что для случайных процессов, обладающих корреляционными функциями с конечными вторыми производными всегда существует такая длина реализации λ^*, на которой дисперсия оценки математического ожидания по двум крайним значениям будет меньшей, чем дисперсия среднеарифметической оценки математического ожидания по трем значениям, взятым на той же реализации.

Длина этого интервала может быть найдена путем решения уравнения

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{18}\rho(\lambda^*)-\frac{4}{9}\rho\left(\frac{\lambda^*}{2}\right)=0,$$

полученного из (1) путем подстановки в него $N=2$ и $N=3$.

Пример. Пусть корреляционная функция процесса $\rho(\tau)=e^{\alpha|\tau|}$, где $\alpha=0{,}1$, длина реализации $T=5$). Оптимальная оценка математического ожидания имеет дисперсию

$$\sigma^2_{m_0}=\frac{2}{2+\alpha T}=0{,}286.$$

Для оценки методом среднего интегрального

$$\sigma^2_{m_T}=0{,}321.$$

Длина интервала, на котором целесообразнее производить оценку по двум значениям, чем по трем, $\lambda^*=5{,}1$. Оценки методом среднего арифметического имеют дисперсии:

по 6 значениям — 0,310,
по 11 значениям — 0,307,
по 21 значению — 0,311.

Вывод. Из доказанной теоремы вытекает важный практический вывод, что при оценке математического ожидания методом среднего арифметического следует ограничиваться некоторым N и не следует стремиться получить максимально возможное число точек фиксации, так как это только ухудшит точность полученных результатов при возросшем объеме обработки.

Поступила в редакцию
7.5.59

ON THE ESTIMATION OF A MEAN IN STATIONARY PROCESSES

S. Ya. VILENKIN

(*Summary*)

The variance of the estimate

$$m_{N+1} = \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} \xi\left(\frac{i}{N}\cdot T\right)$$

of a mean of a stationary process $\xi(t)$ is shown to attain its minimum value for some finite N.

ОБ ОДНОВЕРШИННОСТИ УСТОЙЧИВЫХ ЗАКОНОВ

И. А. ИБРАГИМОВ и К. Е. ЧЕРНИН

Как хорошо известно, логарифм характеристической функции $f(t)$ устойчивого распределения $F(x)$ дается формулой (см. [1])

$$\log f(t)=\begin{cases} i\gamma t - c|t|^{\alpha}\left(1 - i\beta\dfrac{t}{|t|}\operatorname{tg}\dfrac{\pi\alpha}{2}\right), & \alpha \neq 1, \\ i\gamma t - c|t|\left(1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}\dfrac{t}{|t|}\log|t|\right), & \alpha = 1, \end{cases} \tag{1}$$

здесь $-\infty < \gamma < \infty$, $c \geqslant 0$, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 2$.

В настоящей заметке часто будет удобно исходить из другой формы записи характеристических функций, предложенной В. М. Золотаревым ([2]),

$$\log f(t)=\begin{cases} i\gamma t - c|t|^{\alpha}\exp\left\{-i\dfrac{\pi}{2}K(\alpha)\beta\dfrac{t}{|t|}\right\}, & \alpha \neq 1, \\ i\gamma t - c|t|\left(1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}\dfrac{t}{|t|}\log|t|\right), & \alpha = 1, \end{cases} \tag{2}$$

здесь $K(\alpha) = 1 - |1-\alpha|$, а область изменения параметров та же, что и в (1).

Без потери общности можно считать $\gamma = 0$, $c = 1$. Тогда соответствующая $f(t)$ плотность распределения может быть записана в виде

$$p(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\int_0^{\infty} \exp\left\{itx - t^{\alpha}e^{-i\frac{\pi}{2}K(\alpha)\beta}\right\} dt. \tag{3}$$

Теорема. *Все устойчивые функции распределения одновершинны.*

Эта теорема впервые доказывалась Лапиным (см. [1]), но, как выяснилось впоследствии [3], его доказательство содержало ошибку.

Мы приведем доказательство этой теоремы для устойчивых распределений с $\alpha < 1$, случай $\alpha > 1$ рассматривается аналогично; функции распределения с $\alpha = 1$ будут одновершинными как пределы (например, при $\alpha \uparrow 1$) одновершинных функций распределения *.

Лемма 1. *Для $\alpha > 1$, $x > 0$ имеет место следующее интегральное представление функции $p'_x(x, \alpha, 1)$:*

$$p'_x(x, \alpha, 1) = \frac{1}{\pi}x^{\frac{2}{\alpha-1}}\int_0^{\pi} e^{-x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}a(\varphi)} b(\varphi)\, d\varphi, \tag{4}$$

---

* В этом проще всего убедиться, записав $\log f(t)$ в виде

$$\log f(t) = c_1\int_{-\infty}^{0}\left\{e^{itu} - 1 - itu\right\}\frac{du}{|u|^{1+\alpha}} + c_2\int_0^{\infty}\left\{e^{itu} - 1 - itu\right\}\frac{du}{u^{1+\alpha}},$$

c_1, c_2 — константы (см [1], стр. 181).

где $a(\varphi) = \left(\frac{\sin\alpha\varphi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\sin(1-\alpha)\varphi}{\sin\alpha\varphi}$ *строго возрастает в* $(0, \pi)$, а

$$b(\varphi) = \left(\frac{\sin\alpha\varphi}{\sin\varphi}\right)^{\frac{2}{1-\alpha}} \left(\frac{2\alpha\cos\varphi\sin(1-\alpha)\varphi}{(1-\alpha)\sin\alpha\varphi} - 1\right)$$

имеет в $(0, \pi)$ *ровно одну перемену знака.*

Для $x < 0$, $\alpha < 1$

$$p'_x(x, \alpha, 1) \equiv 0. \tag{5}$$

Доказательство. Функция

$$v(z) = \frac{1}{\pi} x^{\frac{2}{\alpha-1}} iz \exp\left\{x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}(iz - z^\alpha e^{i\frac{\pi\alpha}{2}})\right\}$$

комплексного переменного $z = \rho e^{i\varphi}$ аналитична в комплексной плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси и

$$p'_x(x, \alpha, 1) = \operatorname{Re} \int_0^\infty v(z)\, dz. \tag{6}$$

Заменяя контур в (6) контуром $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, где Γ_1 — участок мнимой полуоси: $0 \leqslant \rho \leqslant \alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$; Γ_2 — кривая

$$\rho = \left(\frac{\sin\alpha\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и производя необходимые вычисления, получим (4).

Заметим, что контур Γ_2 — контур перевала

$$\operatorname{Im}(iz - z^\alpha e^{i\frac{\pi\alpha}{2}}) = 0.$$

Равенство (5) хорошо известно.

Лемма 2. (А. Винтнер [4]) *Симметричные устойчивые законы одновершинны.*

Лемма 3. *Для того чтобы при некотором* $\alpha \neq 1$ *устойчивые законы были одновершинны при всех* β, $-1 \leqslant \beta \leqslant 1$ *достаточно, чтобы были одновершинны законы с* $\beta = 1$.

Доказательство (для $\alpha < 1$). Так как $p(x, \alpha, \beta) = p(-x, \alpha, -\beta)$, достаточно ограничиться случаем $\beta \geqslant 0$. Из леммы 2 и равенства

$$p'_x(x, \alpha, \beta) = \beta^{-\frac{1}{\alpha}}(1-\beta)^{-\frac{2}{\alpha}} \int_0^\infty p'_x((x-t)(1-\beta)^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha, 0)\, p(t\beta^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha, 1)\, * \tag{7}$$

вытекает, что $p'_x(x, \alpha, \beta) > 0$ при $x \leqslant 0$.

Нетрудно проверить (ср. [5]), что функция

$$A(\tau, \mu) = x^2 p'_x(x, \alpha, \beta), \text{ где } x = e^{-\tau};\ \beta = \frac{2}{\pi}\mu,$$

гармоническая в области $-\infty < \tau < \infty$, $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{\pi}{2}$. При фиксированном β функция $p'_x(x, \alpha, \beta)$ аналитическая ([6]) и не может иметь точек сгущения нулей. Отсюда вытекает, что линии уровня $p'_x(x, \alpha, \beta) = 0$ не могут ограничивать никакую область в полосе $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

* В этом равенстве плотность $p(x, \alpha, \beta)$ определяется характеристической функцией, записанной в форме (1).

Из асимптотических выражений для $p'_x(x, \alpha, \beta)$ при больших x ([7]) следует, что эти линии не могут удаляться в бесконечность и, следовательно, должны выйти на граничные прямые $\beta = 0$, $\beta = 1$. К каждой точке граничных прямых, не являющейся вершиной плотностей $p(x, \alpha, 0)$, $p(x, \alpha, 1)$ может подходить лишь четное число линий уровня *. Элементарные топологические рассуждения (задача Эйлера о 7 мостах) показывают теперь, что, если существуют неодновершинные плотности $p(x, \alpha, \beta)$, то в полосе $x \geqslant 0$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ найдется область, границей которой служат линии уровня $p'_x(x, \alpha, \beta) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Запишем функцию $p'_x(x, \alpha, 1)$ в виде

$$p'_x(x, \alpha, 1) = \frac{1}{\pi} x^{\frac{2}{\alpha-1}} \left[\int_0^{\sigma} e^{-x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\varphi)} b(\varphi)\, d\varphi + \int_{\sigma}^{\pi} e^{-x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\varphi)} b(\varphi)\, d\varphi \right],$$

где σ, $0 < \sigma < \pi$, единственный нуль функции $b(\varphi)$.

Пусть x_0 — какой-нибудь нуль функции $p'_x(x, \alpha, 1)$. Тогда

$$p''_{xx}(x_0, \alpha, 1) < \frac{\alpha}{\pi}(1-\alpha) x_0^{\frac{3}{\alpha-1}} a(\sigma) \left[\int_0^{\pi} e^{-x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\varphi)} b(\varphi)\, d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int_{\sigma}^{\pi} e^{-x_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} a(\varphi)} b(\varphi)\, d\varphi \right] = 0. \qquad (8)$$

Из (8) следует, что $p'_x(x, \alpha, 1)$ имеет в $(0, \infty)$ ровно одну перемену знака. Теорема доказана.

Как уже упоминалось, случай $\alpha > 1$ рассматривается аналогично, только вместо леммы 1 нужно использовать лемму 1′.

Лемма 1′. *При* $x > 0$, $\alpha > 1$.

$$p'_x(x, \alpha, 1) = \frac{x^{\frac{2}{\alpha-1}}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\alpha}}^{\pi} \exp\left\{ -x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{\sin\varphi}{\sin(-\alpha\varphi)} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\sin(\alpha-1)\varphi}{\sin(-\alpha\varphi)} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sin\varphi}{\sin(-\alpha\varphi)} \right)^{\frac{2}{\alpha-1}} \left(1 - \frac{2\alpha\cos\varphi \cdot \sin(\alpha-1)\varphi}{(\alpha-1)\sin\alpha\varphi} \right) d\varphi < 0;$$

при $x < 0$, $\alpha > 1$

$$p'_x(x, \alpha, 1) = \frac{|x|^{\frac{2}{\alpha-1}}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left\{ -|x|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha\varphi} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\sin(\alpha-1)\varphi}{\sin\alpha\varphi} \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha\varphi} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{2\alpha\cos\varphi\sin(\alpha-1)\varphi}{(\alpha-1)\sin\alpha\varphi} - 1 \right) d\varphi.$$

Лемма 1′, как и лемма 1, доказывается интегрированием соответствующей функции по контуру перевала.

---

* Нетрудно заметить, что функция $U(x, \beta) = p'_x(x, \alpha, \beta)$ псевдогармоническая. Детальное изучение поведения линий уровня $U(x, \beta) = 0$ таких функций можно найти в гл. 1 монографии [8].

Замечание. Интегрирование по контурам, указанным в леммах 1 и 1′, позволяет получить полезные интегральные представления плотности $p(x, \alpha, 1)$. Например, при $\alpha<1$, $x>0$ будем иметь

$$p(x, \alpha, 1) = \frac{\alpha}{(1-\alpha)\pi} x^{\frac{1}{\alpha-1}} \int_0^{\pi} \exp\left\{-x^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{\sin \alpha\varphi}{\sin \varphi}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\sin(1-\alpha)\varphi}{\sin \varphi}\right\} \cdot \left(\frac{\sin \alpha\varphi}{\sin \varphi}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{\sin(1-\alpha)\varphi}{\sin \varphi} d\varphi.$$

Поступила в редакцию
7. 5. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГИТТЛ, М., 1949.
[2] В. М. Золотарев, Преобразования Меллина-Стилтьеса в теории вероятностей, Теория вероят. и ее примен. II, 4 (1957), 444—469.
[3] K. L. Chung, Sur le lois probabilite unimodales, C. R. Acad. Sci, 236, 6 (1953).
[4] A. Wintner, Cauchy's stable distributions and an «explicit formula» of Mollin, Amer. J. Math., 78 (1956), 819—861.
[5] В. М. Золотарев, Об аналитических свойствах устойчивых законов, Вестник Ленингр. ун-та, сер. матем. № 1 (1956).
[6] Ю. В. Линник, Об устойчивых законах с показателем, меньшим единицы, ДАН СССР, 94, 4 (1954), 619—621.
[7] А. В. Скороход, Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения, ДАН СССР, 98, 5 (1954), 731—734.
[8] М. Морс, Топологические методы теории функций комплексного переменного, ИЛ, М., 1951.

ON THE UNIMODALITY OF STABLE LAWS

I. A. IBRAGIMOV and K. E. ČERNIN (LENINGRAD)

(*Summary*)

It is proved that all distribution functions of stable laws are unimodal.

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Р. БЕЛМАНА

И. В. РОМАНОВСКИЙ

Пусть задана квадратная матрица $\| a_{ij}(q) \|$, i-ая строка которой зависит от параметра q_i; $i = 1, \ldots, N$.

Сделаем следующие предположения:

(a) $q = (q_1, \ldots, q_N)$ пробегает множество S, обладающее тем свойством, что для любого набора чисел $r_1, r_2, \ldots, r_N$ существует $q^* \in S$, при котором достигается максимум выражения $\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(q) r_j$ одновременно при всех i;

(b) $0 < a_{ij}(q) \leqslant m < \infty$ для $q \in S$ и $i, j = 1, \ldots, N$;

(c) для любого q пусть $\varphi(q)$ обозначает характеристический корень матрицы $\| a_{ij}(q) \|$, наибольший по абсолютной величине. Предполагается, что $\varphi(q)$ достигает максимума на S;

(d) максимум $\varphi(q)$ достигается только при одном значении q.

Р. Белман ([1], [2]) доказал следующие теоремы:

1. *В предположениях* (a) — (c) *существует единственная положительная постоянная* λ, *обладающая тем свойством, что однородная система*

$$\lambda y_i = \max_q \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(q)\, y_j, \quad i = 1, \ldots, N \tag{1}$$

имеет положительное решение $y_i > 0$; $i = 1, \ldots, N$. *Это решение единственно с точностью до постоянного множителя и*

$$\lambda = \max_{q \in S} \varphi(q). \tag{2}$$

2. *Пусть*

$$x_i(n+1) = \max_q \sum_{j=1}^{N} a_{ij}(q)\, x_j(n), \tag{3}$$
$$x_i(0) = c_i, \quad c_i \geqslant 0; \quad i = 1, \ldots, N.$$

Тогда в предположениях (a) — (d) *при* $n \to \infty$ *имеем*

$$x_i(n) \sim a y_i \lambda^n, \tag{4}$$

где $a = a(c_1, \ldots, C_N)$, *а* y — *решение уравнения* (1).

Ниже приводится доказательство второй теоремы, которая у Р. Белмана доказана с ошибкой *.

Пусть y_i^0 — положительное решение уравнения (1). Обозначим

$$b_{ij}(q) = \frac{a_{ij}(q)\, y_j^0}{\lambda y_i^0}, \qquad z_i = \frac{y_i}{y_i^0}.$$

Тогда (1) примет вид

$$z_i = \max_q \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(q)\, z_j; \quad i = 1, \ldots, N. \tag{5}$$

Единственное с точностью до положительного множителя решение этого уравнения таково:

$$z_i = 1, \quad i = 1, \ldots, N.$$

Отсюда следует, что для любого i

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij}(q^*) = 1, \quad b_{ij}(q^*) \geqslant k > 0, \tag{6}$$

где q^* значение, при котором в (5) достигается максимум, и что для остальных q

$$\sum_{j=1}^{N} b_{ij}(q) \leqslant 1. \tag{6'}$$

Производя замены

$$x_i(n) = \lambda^n y_i^0 u_i(n), \qquad c_i = y_i^0 d_i,$$

получим, что (3) эквивалентно соотношению

$$u_i(n+1) = \max_q \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(q)\, u_j(n),$$
$$u_i(0) = d_i,$$

а (4) утверждению

$$u_i(n) \to b, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{7}$$

где b зависит только от $d_1, \ldots, d_N$.

* Белман не учитывает зависимости вводимых им величин $\overline{q}$, ϑ, ϑ_1 от n. Поэтому его рассуждение проходит только для конечного S.

Пусть

$$t_i(n) = l(n)\, w_i(n),$$
$$\max_i t_i(n) = 1,$$
$$w_i(n+1) = \max_q \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(q)\, t_j(n), \tag{8}$$
$$w_i(0) = d_i.$$

Тогда (7) эквивалентно тому, что

$$t_i(n) \to 1; \quad i = 1, \ldots, N.$$

В силу (6′) и (8) имеем

$$\max_i w_i(n) \leqslant 1. \tag{9}$$

Кроме того, для всех i

$$w_i(n+1) = \max_q \sum_{j=i}^{N} b_{ij}(q)\, t_j(n) \geqslant \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(q^*)\, t_j(n) \geqslant k + (1-k) \min_i t_i(n),$$

отсюда

$$1 - \min_i w_i(n+1) \leqslant (1-k)\,[1 - \min_i t_i(n)],$$

а так как в силу (9)

$$l(n) \geqslant 1,$$

то

$$1 - \min_i t_i(n+1) \leqslant (1-k)\,[1 - \min_i t_i(n)],$$

что и доказывает теорему.

Отметим, что и требование (d) использовалось только при установлении ограниченности элементов $b_{ij}(q^*)$ снизу (см. (6)).

Постоянная b, встречающаяся в (7), равна пределу последовательности

$$\prod_{s=0}^{n} l(s),$$

которая монотонна и ограничена.

Поступила в редакцию
2.6.59

ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Bellman, On a quasi-linear equation, Canad. Journ. of Math., 8, 2 (1956), 198—202.

[2] R. Bellman, Dynamic programming, Princeton, 1957, Ch. XI, Markovian Decision Processes.

ON ONE THEOREM OF R. BELLMAN

I. V. ROMANOVSKY (*LENINGRAD*)

(*Summary*)

This paper contains a proof of a theorem which R. Bellman ([1], [2]) proved incorrectly.

К ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛА ПРИ НАЛИЧИИ ВНУТРЕННИХ ШУМОВ

ЛИ ХЕН ВОН

В настоящей работе дается решение задач о синтезе оптимального корректирующего устройства для системы автоматического регулирования (САР), при наличии как внутренних шумов, приложенных в разных точках системы, так и помехи, поступающей на систему вместе с полезным сигналом. При этом предполагается, что оптимальная коррекция осуществляется параллельно в обратной связи.

Как известно, задача о синтезе оптимального корректирующего устройства (в случае последовательной коррекции) для САР при наличии внутреннего шума, приложенного только в одной точке системы, и помехи, поступающей на систему вместе с полезным сигналом, впервые была поставлена и решена Пелегрэном [1] в классе систем с постоянными параметрами. Между тем на практике часто целесообразно осуществить оптимальную параллельную коррекцию в обратной связи для САР при наличии внутренних случайных шумов, приложенных в разных точках системы.

Рассмотрим следующую САР, находящуюся под воздействием внутренних шумов и помехи (см. рис. 1).

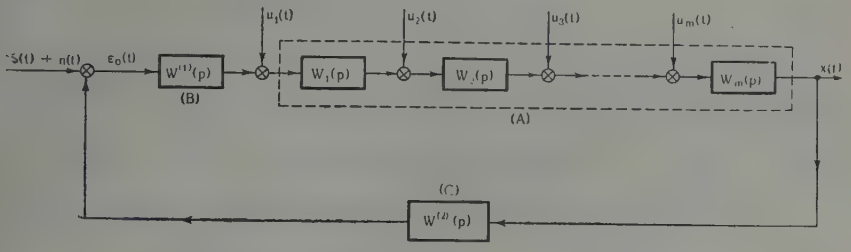

Рис. 1

В рис. 1 обозначения имеют следующие значения:

(A) — объект регулирования (поэтому будем считать известными все линейные дифференциальные операторы $W_i(p)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где $p = \frac{d}{dt}$);

(B) — заданное устройство для последовательной коррекции системы;

(C) — искомое устройство для оптимальной параллельной коррекции системы.

Предположим, что рассматриваемая система находится под влиянием полезного сигнала $s(t)$ помехи $n(t)$ и внутренних случайных шумов $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$. Пусть полезный сигнал $s(t)$ является суммой двух составляющих $s(t) = g(t) + m(t)$, где $g(t)$ созданная функция времени в виде полинома, $m(t)$ — стационарная случайная функция с заданной корреляционной функцией $R_m(\tau)$ (или со спектральной плотностью $S_m(\omega)$). Помеха $n(t)$ и внутренние случайные шумы $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ также предполагаются стационарными случайными функциями с заданными соответственно корреляционными функциями $R_n(\tau)$ (или со спектральной плотностью $S_n(\omega)$) и $R_{u_1}(\tau), R_{u_2}(\tau), \ldots, R_{u_m}(\tau)$ (или со спектральными плотностями $S_{u_1}(\omega), S_{u_2}(\omega), \ldots, S_{u_m}(\omega)$).

Далее предположим, что

1) искомая функция веса системы обращается в нуль вне интервала $(0, T)$, где T — время наблюдения, т. е. мы будем искать оптимальное корректирующее устройство в классе систем с конечной памятью;

2) $g(t)$ представима в виде полинома r-го порядка, т. е.

$$g(t) = \sum_{i=0}^{r} a_i t^i; \tag{1}$$

3) случайные функции $m(t)$, $n(t)$, $u_1(t)$ $u_2(t)$, $\ldots$, $u_m(t)$ имеют нулевые средние значения;

4) случайные функции $m(t)$, $n(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\ldots$, $u_m(t)$ взаимно некоррелированы.

Поставим следующую задачу. Требуется найти такую линейную систему, которая при наличии помехи $n(t)$ и внутренних случайных шумов $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\ldots$, $u_m(t)$, приложенных в разных точках системы, имела бы выход, наиболее близкий к выходу наперед заданной идеальной системы

$$s^*(t) = H(p)[g(t) + m(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\tau)[g(t-\tau) + m(t-\tau)]\,d\tau, \tag{2}$$

где $H(p)$ — дифференциальный оператор воспроизведения сигнала

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} H(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega.$$

Потребуем, чтобы ошибка воспроизведения $\varepsilon(t) = s^*(t) - x(t)$, где $x(t)$ — процесс на выходе реальной системы, удовлетворяла условиям

$$\mathbf{M}[\varepsilon(t)] = 0 \qquad \left(\begin{array}{c} \text{для любого значения коэффициентов} \\ a_i\,(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ r) \text{ полинома } g(t) \end{array} \right), \tag{3}$$

$$\mathbf{M}[\varepsilon^2(t)] = \min. \tag{4}$$

На основании найденной при решении этой задачи функции веса системы, можем определить оптимальную передаточную функцию искомого параллельного корректирующего устройства. Из рис. 1, следует, что

$$\varepsilon(t) = s^*(t) - x(t) = s^*(t) -$$

$$- \left\{1 + \left[\prod_{i=1}^{m} W_i(p)\right] W^{(1)}(p) \cdot W^{(2)}(p)\right\}^{-1} \cdot \left[\prod_{i=1}^{m} W_i(p)\right] \cdot W^{(1)}(p)\,[s^*(t) + N(t)], \tag{5}$$

где

$$\prod_{i=1}^{m} W_i(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p) \ldots W_{m-1}(p)\, W_m(p), \tag{6}$$

$$N(t) = [1 - H(p)]\,[g(t) + m(t)] + n(t) + \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu(t), \tag{7}$$

$$U_\nu(t) = \left\{\left[\prod_{i=1}^{\nu-1} W_i(p)\right] W^{(1)}(p)\right\}^{-1} u_\nu(t), \quad (\nu = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m). \tag{8}$$

Заметим, что величины $U_\nu(t)$ и $N(t)$ известны, ибо дифференциальные операторы $W_i(p)$ $(i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m)$ и $W^{(1)}(p)$ заданы.

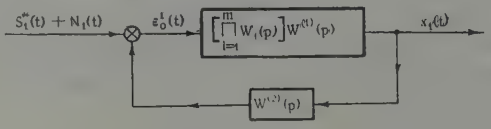

Рис. 2

Теперь рассмотрим следующую САР без воздействия внутренних шумов, изображенную на рис. 2. Рассматривая в этой САР $s_1^*(t)$ как полезный сигнал и $N_1(t)$ как помеху, получим из рис. 2 следующее выражение для ошибки воспроизведения

$$\varepsilon_1(t) = s_1^*(t) - x_1(t) = s_1^*(t) -$$

$$- \left\{1 + \left[\prod_{i=1}^{m} W_i(p)\right] \cdot W^{(1)}(p)\, W^{(2)}(p)\right\}^{-1} \left[\prod_{i=1}^{m} W_i(p)\right] W^{(1)}(p)\,[S_1^*(t) + N_1(t)]. \tag{9}$$

Теперь сравнивая (5) и (9), мы видим, что ошибка воспроизведения в обоих задачах одинакова, если только во второй задаче в качестве $s_1^*(t)$ и $N_1(t)$ выберем соответственно $s^*(t)$ и $N(t)$ определяемые формулами (2) и (7). Итак, первая задача оптимальной фильтрации при наличии внутренних шумов сведена к обычной задаче фильтрации полезного сигнала $s^*(t)$ при наличии помехи $N(t)$ без внутренних шумов. Легко видеть, что когда

$s_1^*(t) \equiv s^*(t)$ и $N_1(t) \equiv N(t)$, то $x_1(t) \equiv x(t)$. Тогда из рис. 2 следует, что процесс $x(t)$ на выходе реальной системы имеет следующее выражение

$$x(t) = \Phi(p)\,[s^*(t) + N(t)], \tag{10}$$

где

$$\Phi(p) = \left\{1 + \left[\prod_{i=1}^{m} W_i(p)\right] \cdot W^{(1)}(p) \cdot W^{(2)}(p)\right\}^{-1} \cdot \left[\prod_{i=1}^{m} W_i(p)\right] \cdot W^{(1)}(p), \tag{11}$$

$$s^*(t) + N(t) = g(t) + m(t) + n(t) + \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu(t). \tag{12}$$

Если предположить, что корреляционная функция $R(\tau)$ суммы процессов $m(t)$, $n(t)$, $U_1(t)$, $U_2(t)$, . . . , $U_m(t)$ имеет q непрерывных производных, и следовательно, процесс $g(t) + m(t) + n(t) + \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu(t)$ дифференцируем q раз, то процесс $x(t)$ на выходе реальной системы можно записать (см. [2]) в виде

$$x(t) = \sum_{j=0}^{q} \int_0^T \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} \left[g(t-\tau) + m(t-\tau) + n(t-\tau) + \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu(t-\tau)\right] d\overline{W}_j(\tau), \tag{13}$$

где $\overline{W}_j(\tau)$ — функции с ограниченной вариацией, характеризующие оптимальную систему. Предполагается, что они непрерывны внутри интервала интегрирования $(0, T)$ и, возможно, имеют скачки первого рода при $\tau = 0$ и $\tau = T$ так, что интегралы Стильтьеса в (13) существуют. Интегрируя по частям (13) и учитывая равенства

$$f^{(i)}(0+) = (-1)^i \int_0^T f(\tau)\,\delta^{(i)}(\tau)\,d\tau,$$

$$f^{(i)}(T-0) = \int_0^T f(\tau)\,\delta^{(i)}(T-\tau)\,d\tau, \tag{14}$$

где $\delta(\tau)$ — функция Дирака, получим

$$x(t) = \int_0^T \left[g(t-\tau) + m(t-\tau) + n(t-\tau) + \sum_{\nu=1}^{m} U_\nu(t-\tau)\right] \cdot \left[b(\tau) + \sum_{j=0}^{q} C_j \delta^{(j)}(\tau) + \sum_{j=0}^{q} D_j \delta^{(j)}(T-\tau)\right] d\tau, \tag{15}$$

где

$$b(\tau) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \dfrac{d^{j+1}\overline{W}_j(\tau)}{d\tau^{j+1}}, & 0 < \tau < T, \\ 0, & \tau \overline{\in} (0, T). \end{cases} \tag{16}$$

Вводя новую функцию

$$K(\tau) = \begin{cases} b(\tau) + \sum_{j=0}^{q} C_j \delta^{(j)}(\tau) + \sum_{j=0}^{q} D_j \delta^{(j)}(T-\tau), & \tau \in [0, T], \\ b(\tau), & \tau \in (0, T), \\ 0, & \tau \overline{\in} [0, T], \end{cases} \tag{17}$$

получим из (15)

$$x(t)=\int_0^T K(\tau)\left[g(t-\tau)+m(t-\tau)+n(t-\tau)+\sum_{\nu=1}^{m}U_\nu(t-\tau)\right]d\tau. \tag{18}$$

Из условия (3) мы получим $r+1$ уравнений, которым должна удовлетворять искомая функция веса $K(t)$

$$\int_0^T K(\tau)\tau^i d\tau=\mu_i, \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ r), \tag{19}$$

где

$$\mu_i \equiv \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{H}(\tau)\tau^i d\tau. \tag{20}$$

При выполнении уравнений (19) имеем следующее выражение для среднеквадратичной ошибки

$$\mathbf{M}[\varepsilon^2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{H}(\tau)\mathcal{H}(\xi)\,R_m(\tau-\xi)\,d\tau d\xi+\int_0^T\int_0^T K(\tau)K(\xi)\cdot$$

$$\cdot\left[R_m(\tau-\xi)+R_n(\tau-\xi)+\sum_{\nu=1}^{m}R_{U_\nu}(\tau-\xi)\right]d\tau d\xi-$$

$$-2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\mathcal{H}(\tau)K(\xi)R_m(\tau-\xi)\,d\tau d\xi. \tag{21}$$

Решая вариационную задачу условного экстремума для функционала (21), получим следующее интегральное уравнение, которому должна удовлетворять искомая функция веса системы, реализующая минимум функционала (21)

$$\int_0^T K(\tau)[R_m(t-\tau)+R_n(t-\tau)+R_U(t-\tau)]\,d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{H}(\tau)R_m(t-\tau)\,d\tau+\sum_{j=0}^{r}\gamma_j t^j, \qquad (0\leqslant t\leqslant T), \tag{22}$$

где

$$R_U(t)=\sum_{\nu=1}^{m}R_{U_\nu}(t),$$

$\gamma_j\,(j=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ r)$ — множители Лагранжа. Решение интегрального уравнения (22) будет получено для класса стационарных процессов со спектральной плотностью, имеющей дробно-рациональное выражение

$$S(\omega)=S_m(\omega)+S_n(\omega)+S_U(\omega)=$$

$$=\frac{b_0+b_1\omega^2+\dots+b_k\omega^{2k}}{a_0+a_1\omega^2+\dots+a_l\omega^{2l}}=\frac{M(j\omega)M^*(j\omega)}{L(j\omega)L^*(L\omega)}, \quad (l>k), \tag{23}$$

где M и L — многочлены, а звездочкой обозначается операция комплексного сопряжения.

Можно показать (см. [2]), что корреляционная функция стационарного процесса со спектральной плотностью (23) связана с функцией Грина самосопряженной краевой задачи

$$L(p)L^*(p)y(t)=0,$$

$$\lim_{t\to\infty}y^{(n)}(t)=\lim_{t\to-\infty}y^{(n)}(t)=0, \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ l-1) \tag{24}$$

соотношением

$$R(t-\tau) = M(p)\,M^*(p)\,G(t-\tau), \tag{25}$$

где $G(t-\tau)$ — функция Грина задачи (24), являющаяся решением уравнения

$$L(p)\,L^*(p)\,G(t-\tau) = \delta(t-\tau). \tag{26}$$

На основании (25) и (22) мы получим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами относительно $\int_0^\pi G(t-\tau)\,K(\tau)\,d\tau$

$$M(p)\,M^*(p)\left[\int_0^T G(t-\tau)\,K(\tau)\,d\tau\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\tau)\,R_m(t-\tau)\,d\tau + \sum_{j=0}^{r} \gamma_j t^j, \quad (0 \leqslant t \leqslant T). \tag{27}$$

Решая уравнение (27), получим его общее решение в виде

$$\int_0^T G(t-\tau)\,K(\tau)\,d\tau = \sum_{\mu=1}^{2k} C_\mu e^{\lambda_\mu t} + M^{-1}(p)\,M^{*-1}(p)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\tau)\cdot R_m(t-\tau)\,d\tau + \sum_{j=0}^{r} \gamma_j t^j\right], \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{28}$$

где $\lambda_\mu (\mu = 1, 2, \ldots, 2k)$ — корни характеристического уравнения

$$M(\lambda)\,M^*(\lambda) = 0. \tag{29}$$

Применяя к обоим частям (28) оператор $L(p)\,L^*(p)$ и учитывая (26) и (17), мы получим следующее выражение для функции веса оптимальной системы

$$K(t) = \sum_{\mu=1}^{2k} B_\mu e^{\lambda_\mu t} + \sum_{j=0}^{r} A_j t^j + L(p)\,L^*(p)\,M^{-1}(p)\,M^{*-1}(p)\cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\tau)\,R_m(t-\tau)\,d\tau\right] + \sum_{j=0}^{q} C_j \delta^{(j)}(t) + \sum_{j=0}^{q} D_j \delta^{(j)}(T-t), \tag{30}$$

$$(0 \leqslant t \leqslant T,\ q = l-k-1).$$

Для того чтобы определить B_μ, A_j, C_j и D_j, подставим (30) в (22) и потребуем, чтобы полученное равенство удовлетворялось тождественно. Тогда получим $2l$ линейных алгебраических уравнений для определения B_μ, A_j, C_j и D_j. Остальные $r+1$ уравнений получаются из уравнений (19).

При выполнении уравнения (22) выражение для среднеквадратичной ошибки имеет следующий вид:

$$M[\varepsilon^2]_{\text{опт}} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(\tau)\,\mathcal{H}(\xi)\,R_m(\tau-\xi)\,d\tau d\xi - 2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{T} \mathcal{H}(\tau)\,K(\xi)\,R_m(\tau-\xi)\,d\tau d\xi + \sum_{j=0}^{r} \gamma_j \mu_j = \text{const}, \tag{31}$$

где $K(t)$ — функция веса найденной оптимальной системы. Теперь остается показать, как можно определить $W^{(2)}(S)$, зная $K(t)$. Так как имеет место следующее соотношение

$$\Phi(S) = \int_0^T K(t)\, e^{-St}\, dt =$$

$$= \left\{ 1 + \left[\prod_{i=1}^{m} W_i(S) \right] W^{(1)}(S) \cdot W^{(2)}(S) \right\}^{-1} \left[\prod_{i=1}^{m} W_i(S) \right] \cdot W^{(1)}(S), \tag{32}$$

то на основании (32) легко получить

$$W^{(2)}(S) = 1 - \frac{\Phi(S)}{\left[\prod_{i=1}^{m} W_i(S) \right] W^{(1)}(S)}, \tag{33}$$

где

$$\Phi(S) = \int_0^\infty K(t)\, e^{-St} dt.$$

В заключение заметим, что любая задача оптимальной фильтрации сигнала при наличии внутренних шумов в классе систем с постоянными параметрами может быть сведена к обычной задаче фильтрации без внутреннего шума, и следовательно приводит к интегральному уравнению вида

$$\int_0^T K(\tau)\, R(t-\tau)\, d\tau = f(t). \tag{34}$$

Разные задачи оптимальной фильтрации сигнала приводят только к различному выражению ядра $R(t-\tau)$ и правой части $f(t)$, не меняя тип интегрального уравнения.

Поступила в редакцию
10. 2. 59

ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Пелегрэн, Статический расчет следящих систем, ИИЛ, М., 1957.
[2] C. L. Dolph and M. A. Woodbury, On the relations between Green's functions and covariance of certain stochastic processes, Trans. of AMS, **72** (1952), 519—550.
[3] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюллетень МГУ, **2**, 6 (1941), 1—40.
[4] А. Н. Колмогоров, Интерполирование и экстраполирование стационарных последовательностей, Изв. АН СССР, сер. матем., **5**, 1 (1941), 3—14.

ON THE THEORY FOR OPTIMAL FILTRATION OF A SIGNAL IN THE PRESENCE OF INTERNAL RANDOM NOISE

LI HENG WON *(PYONGYANG)*

(Summary)

This pape· is devoted to the solution of a synthesis problem in opimal automatic control systems with internal stationary random noise applied to different points in the system.

К ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Ю. А. РОЗАНОВ

Под обобщенным стационарным процессом будем понимать (см. Ито [1], Гельфанд [2]) случайный линейный функционал $\xi(\varphi)$ относительно φ (где $\varphi(t)$ — произвольная функция из класса D бесконечно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль вне некоторого интервала), такой, что для $m(\varphi) = M\xi(\varphi)$ и $B(\varphi_1, \varphi_2) = M\xi(\varphi_1)\overline{\xi(\varphi_2)}$ выполнено условие стационарности:

$$m(\tau\varphi) = m(\varphi), \quad B(\tau\varphi_1, \tau\varphi_2) = B(\varphi_1, \varphi_2) \tag{1}$$

(здесь $\tau\varphi(t)$ означает „сдвинутую на τ" функцию $\varphi(t+\tau)$). Будем считать, кроме того, что функционал $\xi(\varphi)$ непрерывен:

$$M|\xi(\varphi_n) - \xi(\varphi)|^2 \to 0$$

при $\varphi_n \Rightarrow \varphi$, т. е. когда все $\varphi_n(t)$ обращаются в нуль вне некоторого (одного и того же, интервала, а внутри этого интервала $\varphi_n^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ при $n \to \infty$ равномерно по t для всех $k = 0, 1, \ldots$

Обозначим H_s^- линейное замыкание случайных величин $h = \xi(\varphi)$ (в смысле расстояния $\|h_1 - h_2\| = (M|h_1 - h_2|^2)^{\frac{1}{2}}$), отвечающих функциям φ, таким, что $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant s$.

Задача экстраполяции случайного процесса $\xi(\varphi)$ заключается в следующем: известна совокупность случайных величин H_s^-; требуется найти величину $h_s(\varphi) \in H_s^-$, такую, что

$$\sigma_s(\varphi) = \inf_{h \in H_s^-} \|h - \xi(\varphi)\| = \|h_s(\varphi) - \xi(\varphi)\|. \tag{2}$$

В настоящей заметке и решается сформулированная выше задача экстраполяции обобщенного стационарного процесса $\xi(\varphi)$.

Как хорошо известно (см., например, [1]), процесс $\xi(\varphi)$ можно представить в спектральном виде:

$$\xi(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\lambda)\, \Phi(d\lambda), \tag{3}$$

где

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, \varphi(t)\, dt$$

есть преобразование Фурье функции $\varphi(t)$, а $\Phi(\Delta)$ — случайная мера, такая, что $M\Phi(\Delta_1)\overline{\Phi(\Delta_2)} = F(\Delta_1 \cap \Delta_2)$, причем $F(\Delta)$ — спектральная мера нашего процесса удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(d\lambda)}{(1+\lambda^2)^{\rho}} < \infty \tag{4}$$

при некотором целом неотрицательном ρ.

Рассмотрим линейное замыкание H случайных величин $\xi(\varphi)$, $\varphi \in D$, причем отождествим все величины $h \in H$, равные с вероятностью 1.

В силу того, что

$$\|\xi(\varphi_1) - \xi(\varphi_2)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}_1(\lambda) - \widetilde{\varphi}_2(\lambda)|^2\, F(d\lambda), \tag{5}$$

пространство H изометрично пространству L^2 функций $\psi(\lambda)$, $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda)|^2 F(d\lambda) < \infty$. Более того, всякую случайную величину $h \in H$ можно представить в виде:

$$h = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\lambda) \Phi(d\lambda), \tag{6}$$

где $\psi(\lambda) \in L^2$.

Может случиться, что $H = \bigcap_s H_s^-$. Будем называть тогда процесс $\xi(\varphi)$ *сингулярным* (ср. [5]). Если процесс сингулярен, то $\xi(\varphi) \in H_s^-$ при любом s, т. е. $h_s(\varphi) = \xi(\varphi)$ для всех $\varphi \in D$.

Теорема 1. *Для сингулярности обобщенного процесса $\xi(\varphi)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda = -\infty, \tag{7}$$

где $f(\lambda) = \frac{F(d\lambda)}{d\lambda}$ в случае, когда $f(\lambda) = 0$ на множестве положительной меры, интеграл в (7) считается равным $-\infty$ по определению).

Доказательство. Необходимость условия (7) будет ясна из дальнейшего. Для доказательства достаточности заметим, что если это условие выполнено, то при любых s, s_0 и $\varphi(t)$, таких, что $\varphi(t) = 0$ при $t \geqslant s_0$,

$$\sigma_s^2(\varphi) = \inf_{h \in H_s^-} \| h - \xi(\varphi) \|^2 \leqslant \inf \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda t_k} - 1 \right|^2 \left| \widetilde{\varphi}(\lambda) \right|^2 F(d\lambda) = 0,$$

где inf берется по всевозможным конечным наборам чисел $c_1, \ldots, c_n$ и $t_1, \ldots, t_n$, таких, что $t_k \leqslant s - s_0$. В самом деле, в силу (7)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)}{1+\lambda^2} d\lambda = -\infty,$$

а к функции $|\widetilde{\varphi}(\lambda)| f(\lambda)$ уже применима основная теорема работы [3] (см. также, [4]).

Таким образом, $\xi(\varphi) \in H_s^-$ для всех $\varphi \in D$, и $H = \bigcap_s H_s^-$, что и требовалось показать.

В дальнейшем будем рассматривать лишь несингулярные процессы.

Не ограничивая общности, можно считать спектральную меру $F(d\lambda)$ абсолютно непрерывной. Действительно, если ее сингулярная часть сосредоточена на множестве Δ_0 лебеговой меры нуль, то

$$\xi(\varphi) = \int_{\Delta_0} \widetilde{\varphi}(\lambda) \Phi(d\lambda) + \int_{\Delta_0} \widetilde{\varphi}(\lambda) \Phi(d\lambda). \tag{8}$$

Величина

$$\xi_1'(\varphi) = \int_{\Delta_0} \widetilde{\varphi}(\lambda) \Phi(d\lambda),$$

как легко следует из вышеизложенного, принадлежит при любом s совокупности H_s^-, и задача сводится к экстраполяции обобщенного процесса

$$\xi_2''(\varphi) = \int_{\Delta_0} \widetilde{\varphi}(\lambda) \Phi(d\lambda),$$

спектральная мера $G(d\lambda)$ которого абсолютно непрерывна;

$$G(\Delta) = M\left|\int\limits_{\Delta\cap\Delta_0} \Phi(d\lambda)\right|^2 = \int\limits_{\Delta} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Итак, нам осталось рассмотреть случай, когда спектральная мера $F(d\lambda)$ процесса $\xi(\varphi)$ абсолютно непрерывна, а спектральная плотность $f(\lambda) = \dfrac{F(d\lambda)}{d\lambda}$ удовлетворяет условию:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda > -\infty. \tag{9}$$

Назовем такой процесс *регулярным*.

Теорема 2. *Если процесс $\xi(\varphi)$ регулярный, то величина $h_s(\varphi)$ представима в виде*

$$h_s(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_s(\lambda)\,\Phi(d\lambda), \tag{10}$$

где

$$\psi_s(\lambda)\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{s} e^{i\lambda t}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu t}\,\widetilde{\varphi}(\mu)\,\alpha(\mu)\,d\mu\,dt,$$

а $\alpha(\lambda)$ есть граничное значение аналитической в нижней полуплоскости функции $\alpha(\zeta)$, $\zeta = \lambda + i\nu$, $\nu \leqslant 0$,

$$\alpha(\zeta) = \exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\mu)}{1+\mu^2}\,\frac{1+\mu\zeta}{\zeta-\mu}\,d\mu. \tag{11}$$

Среднеквадратичная ошибка экстраполяции $\sigma_s(\varphi)$ определяется при этом из равенства

$$\sigma_s^2(\varphi) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{s}^{\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\,\widetilde{\varphi}(\lambda)\,\alpha(\lambda)\,d\lambda\right|^2 dt. \tag{12}$$

Доказательство. В силу условий (4) и (9) функция $\log f(\lambda)$ оказывается интегрируемой. Положим $g(\mu) = \dfrac{1}{2} f(\lambda)(1+\lambda^2)$, $\mu = 2\operatorname{arc\,tg}\lambda$. Так как

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log g(\mu)\,d\mu = 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\frac{1}{2} f(\lambda)(1+\lambda^2)}{1+\lambda^2}\,d\lambda,$$

то функция $\log g(\mu)$ также интегрируема. Поэтому, функция

$$A(z) = \exp\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \log g(\mu)\,\frac{e^{-i\mu}+z}{e^{-i\mu}-z}\,d\mu$$

будет аналитической в единичном круге $|z| < 1$, причем почти всюду существует предел $\lim\limits_{\rho\to 1} A(\rho e^{-i\mu}) = a(\mu)$, $|a(\mu)|^2 = g(\mu)$, (см. [6]).

Далее, преобразование $\zeta = i\dfrac{z-1}{z+1}$ переводит единичный круг в нижнюю полуплоскость; при этом $A(z)$ переходит в аналитическую в нижней полуплоскости функцию $A\left(\dfrac{1-i\zeta}{1+i\zeta}\right)$.

Заметим, полагая в предыдущих равенствах $g(\mu) = \left|\frac{e^{-i\mu}+1}{2}\right|^2$, что

$$\frac{z+1}{2} = \exp\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log\left|\frac{e^{-i\mu}+1}{2}\right|^2\frac{e^{-i\mu}+z}{e^{-i\mu}-z}\,d\mu = \frac{1}{1+i\zeta}$$

и отсюда

$$\frac{1}{1+i\zeta} = \exp\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\frac{1}{1+\lambda^2}}{1+\lambda^2}\frac{1+\lambda\zeta}{\zeta-\lambda}\,d\lambda.$$

В силу сказанного выше, функция

$$\alpha(\lambda) = \frac{\sqrt{2}\,A\left(\frac{1-i\zeta}{1+i\zeta}\right)}{1+i\zeta} = \exp\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\frac{1+\lambda\zeta}{\zeta-\lambda}\,d\lambda$$

аналитична в нижней полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta < 0$, $\zeta = \lambda + i\nu$, причем

$$\alpha(\lambda) = \lim_{\nu\to 0}\alpha(\zeta)$$

существует почти всюду и $|\alpha(\lambda)|^2 = f(\lambda)$. Далее, положим

$$\alpha_k(\lambda) = \frac{\alpha(\lambda)}{\left(1+\frac{i\lambda}{k}\right)^{\rho}}.$$

Функция $\alpha_k(\lambda)$ есть граничное значение аналитической функции

$$\alpha_k(\zeta) = \exp\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\frac{f(\lambda)}{(1+\lambda^2/k^2)^{\rho}}}{1+\lambda^2}\frac{1+\lambda\zeta}{\zeta-\lambda}\,d\lambda$$

и, в силу условия (4),

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\alpha_k(\lambda)|^2\,d\lambda < \infty.$$

Как известно (см. [3], [4]), граничное значение $\alpha_k(\lambda)$ есть преобразование Фурье функции $\widetilde{\alpha}_k(t)$ такой, что $\widetilde{\alpha}_k(t) = 0$ при $t \geqslant 0$.

Имеем

$$\sigma_s^2(\varphi) = \inf_{\chi\in D_s^-}\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\chi}(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda$$

(здесь D_s^- обозначает совокупность функций $\chi\in D$, таких, что $\chi(t) = 0$ при $t \geqslant s$).

Нетрудно убедиться, что для любой функции $\psi\in D$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\psi}(\lambda)|^2\,|\alpha_k(\lambda) - \alpha(\lambda)|^2\,d\lambda \longrightarrow 0 \qquad (13)$$

при $k\longrightarrow\infty$, и поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\chi}(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda = \lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\chi}(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)|^2\,|\alpha_k(\lambda)|^2\,d\lambda.$$

Далее,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\chi}(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\alpha_k(\lambda)|^2 \, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{\chi}(\lambda) \alpha_k(\lambda) \, d\lambda - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{\varphi}(\lambda) \alpha_k(\lambda) \, d\lambda \right|^2 dt, \tag{14}$$

и так как $\chi(t) = 0$ при $t \geqslant s$, $\widetilde{\alpha}_k(t) = 0$ при $t \geqslant 0$, то

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{\chi}(\lambda) \alpha_k(\lambda) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(t-\tau) \widetilde{\alpha}_k(\tau) \, d\tau = 0 \text{ при } t \geqslant s.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\chi}(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\alpha_k(\lambda)|^2 \, d\lambda \geqslant \int_{s}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{\varphi}(\lambda) \alpha_k(\lambda) \, d\lambda \right|^2 dt$$

и отсюда, принимая во внимание (13),

$$\sigma_s^2(\varphi) \geqslant \int_{s}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{\varphi}(\lambda) \alpha(\lambda) \, d\lambda \right|^2 dt. \tag{15}$$

С другой стороны, из работы [3] легко вытекает, что

$$\inf_{\psi \in L_{sk}^-} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\alpha_k(\lambda)|^2 \, d\lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int_{s}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{\varphi}(\lambda) \alpha_k(\lambda) \, d\lambda \right|^2 dt$$

(здесь L_{sk}^- означает линейное замыкание функций, равных $e^{i\lambda t}$ при $t \leqslant s$ и 0 при $t > s$, в смысле среднего квадратичного с весом $|\alpha_k(\lambda)|^2$, причем inf достигается на функции $\psi_{sk}(\lambda)$,

$$\varphi_{sk}(\lambda) \alpha_k(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{s} e^{i\lambda t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu t} \widetilde{\varphi}(\mu) \alpha_k(\mu) \, d\mu \, dt. \tag{16}$$

Поскольку преобразования Фурье функций из D_s^- образуют множество всюду плотное в L^-, то

$$\inf_{\chi \in D_s^-} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\chi}(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\alpha_k(\lambda)|^2 \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{sk}(\lambda) - \widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 |\alpha_k(\lambda)|^2 \, d\lambda =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t} \widetilde{\varphi}(\lambda) \alpha_k(\lambda) \, d\lambda \right|^2 dt$$

Рассмотрим $\Psi_{sk}(\lambda) = \psi_{sk}(\lambda) \Big/ \left(1 + \frac{i\lambda}{k}\right)^{\rho}$. Так как $\psi_{sk}(\lambda)$ есть предел в среднем квадратичном с весом $|\alpha_k(\lambda)|^2$ некоторой последовательности $\widetilde{\chi}_n(\lambda)$, для которой $\chi_n(t) \in D_s^-$, то при $n \to \infty$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \Psi_{sk}(\lambda) - \widetilde{\chi}_n(\lambda) \Big/ \left(1 + \frac{i\lambda}{k}\right)^{\rho} \right|^2 f(\lambda) \, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{sk}(\lambda) - \widetilde{\chi}_n(\lambda)|^2 |\alpha_k(\lambda)|^2 \, d\lambda \longrightarrow 0.$$

Далее,

$$\frac{1}{\left(1+i\frac{\lambda}{k}\right)^{\rho}}=\frac{(-1)^{\rho}k^{\rho-1}}{(\rho-1)!}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{ikt}t^{\rho-1}e^{kt}\,dt,$$

$$\frac{\widetilde{\chi}_n(\lambda)}{\left(1+\frac{i\lambda}{k}\right)^{\rho}}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{(-1)^{\rho}k^{\rho-1}}{(\rho-1)!}\,\chi(t-\tau)\,\tau^{\rho-1}e^{\tau k}\,d\tau\,dt,$$

и легко видеть, что $\dfrac{\widetilde{\chi}_n(\lambda)}{\left(1+i\frac{\lambda}{k}\right)^{\rho}}$ вместе с $\Psi_{sk}(\lambda)$ принадлежит L_s^- — линейному замыканию функций $\widetilde{\chi}(\lambda)$, $\chi(t)\in D_s^-$ в среднем квадратичном с весом $f(\lambda)$.

Из соотношений (13) и (16) вытекает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Psi_{sk}(\lambda)-\Psi_{sl}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi_{sk}(\lambda)\alpha_k(\lambda)-\psi_{sl}(\lambda)\alpha_l(\lambda)|^2\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\psi_{sk}(\lambda)\alpha_k(\lambda)\,d\lambda-\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\psi_{sl}(\lambda)\alpha_l(\lambda)\,d\lambda\right|^2 dt=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{s}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\widetilde{\varphi}(\lambda)\alpha_k(\lambda)\,d\lambda-\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\widetilde{\varphi}(\lambda)\alpha_l(\lambda)\,d\lambda\right|^2 dt\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2|\alpha_k(\lambda)-\alpha_l(\lambda)|^2\,d\lambda\longrightarrow 0$$

и, следовательно, $\Psi_{sk}(\lambda)$ сходятся в среднем квадратичном к некоторой $\Psi_s(\lambda)\in L_s^-$. Поэтому

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Psi_s(\lambda)-\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\Psi_{sk}(\lambda)-\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2 f(\lambda)\,d\lambda=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\Psi_{sk}(\lambda)-\frac{\widetilde{\varphi}(\lambda)}{\left(1+\frac{i\lambda}{k}\right)^{\rho}}\right|^2 f(\lambda)\,d\lambda=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\psi_{sk}(\lambda)-\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2|\chi_k(\lambda)|^2\,d\lambda=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{s}^{\infty}\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\widetilde{\varphi}(\lambda)\alpha_k(\lambda)\,d\lambda\right|^2 dt=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{s}^{\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\widetilde{\varphi}(\lambda)\alpha(\lambda)\,d\lambda\right|^2 dt.$$

Отсюда, принимая во внимание (15), получаем, что

$$\sigma_s^2(\varphi)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{s}^{\infty}\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda t}\widetilde{\varphi}(\lambda)\alpha(\lambda)\,d\lambda\right|^2 dt,$$

$$h_s(\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi_s(\lambda)\Phi(d\lambda).$$

где функция $\Psi_s(\lambda)$ в силу (13), (16) удовлетворяет соотношению:

$$\Psi_s(\lambda)\,\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{s} e^{i\lambda t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu t}\,\widetilde{\varphi}(\mu)\,\alpha(\mu)\,d\mu\,dt.$$

Теорема полностью доказана.

Заметим еще, что в случае регулярного процесса $\xi(\varphi)$ всегда выполняется условие: $h_s(\varphi) \longrightarrow 0$ при $s \longrightarrow \infty$ для любой $\varphi \in D$.

В самом деле

$$\|h_s(\varphi)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_s(\lambda)|^2 f(\lambda) = \int_{-\infty}^{s}\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\,\widetilde{\varphi}(\lambda)\,\alpha(\lambda)\,d\lambda\right|^2 dt \longrightarrow 0$$

при $s \longrightarrow -\infty$. Отсюда получаем, что $\bigcap_s H_s^- = 0$.

Как нетрудно понять, верно и обратное: если $\bigcap_s H_s^- = 0$, то процесс $\xi(\varphi)$ — регулярен, т. е. спектральная мера $F(d\lambda)$ абсолютно непрерывна, спектральная плотность $f(\lambda)$ положительна почти всюду и $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log f(\lambda)}{1+\lambda^2}\,d\lambda > -\infty$ (ср. [5]).

Поступила в редакцию
5. 10. 58

ЛИТЕРАТУРА

[1] K. Ito, Stationary random distributions, Mem. College Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, 28 (1954), 209—223.
[2] И. М. Гельфанд, Обобщенные случайные процессы, ДАН СССР, **100**, 5 (1955), 853—856.
[3] М. Г. Крейн, Об одной экстраполяционной проблеме А. Н. Колмогорова, ДАН СССР, **46** (1944), 306—309.
[4] Дж. Д. Дуб, Вероятностные процессы, гл. XII, ИЛ, М., 1956.
[5] А. Н. Колмогоров, Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, 2, 6 (1941), 1—40.
[6] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, М.— Л., 1950.

ON EXTRAPOLATION OF RANDOM DISTRIBUTIONS

Yu. A. ROZANOV (MOSCOW)

(*Summary*)

Let D denote the space of all infinitely differentiable functions φ that are equal to zero outside an interval; $\xi(\varphi)$ is a random distributions, H is a linear closure of random variables, $\xi(\varphi).\varphi \in D$; and H_s^- is a linear closure of random variables $\xi(\varphi)$ (where $\varphi \in D$ and $\varphi(t) = 0$ for $t \geqslant S$).

The random distribution $\xi(\varphi)$ is called singular if $H = \bigcap_s H_s^-$ and regular if $\bigcap_s H_s^- = 0$.

The necessary and sufficient conditions for singularity (resp. regularity) of random distribution $\xi(\varphi)$ are given.

The problem of extrapolation is solved for the case where $\xi(\varphi)$ is regular.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕМИНАРА КАФЕДРЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

(Февраль—май 1959 г.)

SUMMARY OF PAPERS PRESENTED AT THE SESSIONS OF THE PROBABILITY RESEARCH SEMINAR, MOSCOW UNIVERSITY

(February—May 1959)

Заседание 24 февраля.

Прохоров Ю. В., О некоторых уточнениях неравенства Чебышева (Yu. V. Prohorov, On Some Refinements in Tchebycheff's Inequality).

Заседание 3 марта.

Матвеев Р. Ф., О регулярности многомерных стационарных случайных процессов (Matveyev R. F., On the Regularity of Multidimensional Stationary Random Processes).

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР, том 124, № 6.

Заседание 10 марта.

Клосс Б. М., Об одной предельной теореме на бикомпактных группах (Kloss B. M., On a Limit Theorem for Bicompact Groups).

Содержание доклада опубликовано в журнале „Теория вероятностей и ее применения", том IV, вып. 3.

Клосс Б. М., Безгранично делимые законы на бикомпактных абелевых группах (Kloss B. M., Infinitely Divisible Laws for Bicompact Abel Groups).

Содержание доклада будет опубликовано в журнале „Теория вероятностей и ее применения".

Фрейдлин М. И., О некоторых применениях стохастических уравнений Ито к дифференциальным уравнениям (Freidlin M. I., On Some Applications of Ito's Stochastical Equations in Differential Equations).

Пусть в пространстве R^n задан оператор L

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

удовлетворяющий следующим условиям:

1. a_{ij}, b_i ограничены во всей плоскости и удовлетворяют условию Липшица,
2. $\sum a_{ij}(x) \lambda_i \lambda_j \geqslant 0$;
3. Матрица $B = \{a_{ij}(x)\}$ представима в виде

$$B = \sigma(x)\sigma^*(x) \quad \sigma(x) = \{\sigma_{ij}(x)\},$$

где $\sigma(x)$ — матрица с элементами, удовлетворяющими условию Липшица, $\sigma^*(x)$ — сопряженная к $\sigma(x)$.

Тогда, как показал К. Ито (см. [1]) существует марковский процесс с непрерывными траекториями, инфинитезимальный оператор (см. [2]) которого на функциях с двумя ограниченными непрерывными производными совпадает с L. Этот процесс получается как решение стохастических уравнений Ито:

$$x_t^i - x_s^i = \int_s^t \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}(x_u)\, d\xi^j + \int_s^t b_i(x_u)\, du \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Можно показать, что этот процесс феллеровский. (Определение инфинитезимального оператора, феллеровости и т. д. см. [2].)

Рассмотрим область D с границей Γ. Будем предполагать, что все граничные точки регулярны (см. [3]).

При некоторых ограничениях на процесс можно доказать, что процесс с остановкой на границе Γ тоже будет феллеровским. Обозначим через A — инфинитезимальный оператор процесса, остановленного на Γ. Тогда, пользуясь результатами из [2], можно доказать, что все решения уравнения $Lf = 0$ будут удовлетворять уравнению $Af = 0$. Далее ищется функция $f(x)$ такая, что $Af(x) = 0$; $f|_\Gamma = \varphi$ (задача Дирихле). При некоторых слабых ограничениях доказывается, что $f(x) = M_x(\varphi(x_t))$ является единственным решением задачи Дирихле (x_τ — положение частицы в момент первого выхода на границу). Трудности возникают при исследовании непрерывности и гладкости найденного решения. Относительно непрерывности $M_x\varphi(x_\tau)$ доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если граничная функция непрерывна, то $M_x\varphi(x_\tau)$ непрерывна во всей замкнутой области $D \cup \Gamma$ (граница Γ предполагается регулярной).*

Теорема 2. *Если оператор L у границы не вырожден, то $M_x\varphi(x_\tau)$ непрерывна по x в любой внутренней точке области D для любой ограниченной измеримой $\varphi(x)$.*

Приводятся примеры, подтверждающие необходимость некоторых условий в этих теоремах. Приводится также пример (см. [4]), показывающий, что для гладкости решения нужны дополнительные ограничения.

Близким вопросам посвящены работы по дифференциальным уравнениям [4] и [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kiyosi Ito, Nagoya Math. Jorn., **1**, June, 1950.
[2] Е. Б. Дынкин, Теория вероятн. и ее примен., **I**, 1 (1956).
[3] Р. З. Хасьминский, Теория вероятн. и ее примен., **III**, 4 (1958), 430—451.
[4] А. М. Ильин, Вырождающиеся эллиптические и параболические уравнения, Диссертация, мех.-мат. МГУ, 1957.
[5] G. Fichera, Sulla equarioni differenziali lineari elliptico-paraboliche del secondo ordine, Atti della accademia nazionale del Lincei serie VIII, **V** (1956).

Заседание 24 марта.

Линник Ю. В. (Ленинград), **Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга** (Linnik Yu. V. (Leningrad), A Theoretic-Informational Proof of the Central Limit Theorem under Lindeberg's Conditions).

Содержание доклада опубликовано в журнале „Теория вероятностей и ее применения", том IV, вып. 3.

Линник Ю. В. (Ленинград), **Сообщение о работе О. В. Шалаевского по методу наименьших квадратов при неизвестных весах** (Linnik Yu. V. (Leningrad), The Work of O. V. Shalayevski on the Least-Square Method with Unknown Weights).

Работа О. В. Шалаевского будет опубликована в ДАН СССР.

Петров В. В. (Ленинград), **Асимптотические разложения, связанные с суммами независимых случайных величин** (V. V. Petrov (Leningrad), Some Asymptotic Expansions Connected with the Sums of Independent Random Variables).

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность взаимно независимых случайных величин (вообще говоря, неодинаково распределенных) с математическими ожиданиями EX_j, равными нулю. Введем обозначения

$$\sigma_j^2 = EX_j^2,\ f_j(t) = Ee^{itX_j},\ s_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_n^2,\ \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

$$F_j(x) = \mathbf{P}\{X_j < x\},\ \overline{F}_n(x) = \mathbf{P}\left\{\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{s_n} < x\right\},\ C_n^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} |\overline{F}_n(x) - \Phi(x)|^2 dx.$$

Положим, далее,

$$H_{kn}(x) = \Phi(x) + \sum_{\nu=1}^{k-2} \frac{P_{\nu n}(-\Phi)}{n^{\frac{\nu}{2}}},\quad \|\psi(x)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)^2|\, dx}$$

для всякой функции $\psi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Определение $P_{\nu n}$ $(-\Phi)$ (см., например, в [1]).

Пусть выполняются следующие условия:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{s_n^2}{n} > 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{E}\,|X_j|^k < \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{|x|>n^{\tau}} |x|^k dF_j(x) = 0$

для некоторого целого $k \geqslant 3$ и $0 < \tau < \frac{1}{2}$.

2) $$\int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)|^2 dt = o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

при каждом $\varepsilon > 0$ и некотором $\alpha > 0$.

Теорема 1. *Если выполнены условия* 1 *и* 2 *при* $\alpha = k - \frac{5}{2}$, *то при* $n \to \infty$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} [\overline{F}_n(x) - H_{kn}(x)]^2 dx = o\left(\frac{1}{n^{k-2}}\right),$$

$$\| \overline{F}_n(x) - \Phi(x) \| = \| H_{kn}(x) - \Phi(x) \| + o\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right).$$

Эта теорема позволяет найти сколь угодно много членов асимптотического разложения величины $C_n^{(2)}$, если выполнены условия 1 и 2 при достаточно больших k и α. Приведем два ее следствия.

Теорема 2. *Если выполнены условие* 1 *при* $k = 5$ *и условие* 2 *при* $\alpha = \frac{5}{2}$, *то*

$$C_n^{(2)} = \frac{\lambda_{3n}^2}{96\sqrt{\pi}\,n} - \frac{5}{9216\sqrt{\pi}n^2}\left(\frac{24}{5}\lambda_{5n}\lambda_{3n} - 3\lambda_{4n}^2 - 7\lambda_{4n}\lambda_{3n}^2 + \frac{7}{4}\lambda_{3n}^4\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Определение $\lambda_{\nu n}$ см. [1], гл. 7, (84).

Теорема 3. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ — *последовательность независимых случайных величин каждая из которых имеет равномерное распределение на интервале* $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. *Тогда*

$$C_n^{(2)} = \frac{3}{1280\sqrt{\pi}n^2} + \frac{131}{102400\sqrt{\pi}\,n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Если у нормированной суммы случайных величин $\frac{1}{s_n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ существует плотность $p_n(x)$, то полагаем

$$D_n^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]^2 dx.$$

Введем следующее условие:

3) $$\int\limits_{|t|>\varepsilon} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)|\,dt = o\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

при каждом $\varepsilon > 0$ и некотором $\alpha > 0$.

Теорема 4. *Если выполнены условия* 1 *и* 3 *при* $\alpha = k - \frac{3}{2}$, *то при всех достаточно больших* n *существует плотность* $p_n(x)$ *и, кроме того,*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[p_n(x) - \frac{d}{dx} H_{kn}(x)\right]^2 dx = o\left(\frac{1}{n^{k-2}}\right),$$

$$\left\| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right\| = \left\| \frac{d}{dx} H_{kn}(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right\| + o\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}} \right).$$

В частности, если условие 1 выполнено при $k = 5$, а условие 3 при $\alpha = \frac{7}{2}$, то из теоремы получаем

$$D_n^{(2)} = \frac{5\lambda_{3n}^3}{192\sqrt{\pi}\, n} - \frac{5}{18432\sqrt{\pi}\, n^2}\left(\frac{168}{5}\lambda_{5n}\lambda_{3n} - 21\lambda_{4n}^2 - 63\lambda_{4n}\lambda_{3n}^2 + \frac{77}{4}\lambda_{3n}^4 \right) + o\left(\frac{1}{n^2} \right).$$

В условиях теоремы 3 имеем

$$D_n^{(2)} = \frac{21}{2560\sqrt{\pi}\, n^2} + \frac{801}{204800\sqrt{\pi}\, n^3} + o\left(\frac{1}{n^4} \right).$$

В заметке [2] рассматривался случай $k = 3$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, М., 1947.

[2] В. В. Петров, Об одном классе предельных теорем для независимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен., IV, 2 (1959), 224—228.

Заседание 31 марта.

Сираждинов С. Х. (Ташкент), **О точных оценках в локальной предельной теореме** (Sirajdinov S. H. (Tashkent), On Exact Estimation in the Local Limit Theorem).

Пусть $\{u(t);\ t \geqslant 0\}$ — однородный марковский процесс с конечным числом различных значений $h_1, h_2, \ldots, h_s$. Хорошо известно, что при некоторых общих условиях, при подходящей центрировке и нормировке, случайная величина $\int_0^t u(\tau)\, d\tau$ — асимптотически нормальна. Обозначим вероятностную функцию этой величины при предположении, что $u(0) = h_\gamma$, через $F_t^\gamma(\varepsilon)$.

Пусть $P_t^\gamma(x)$ — функция плотности, соответствующая абсолютно непрерывной компоненте вероятностной функции $F_t^\gamma(\varepsilon)$.

При некоторых, весьма общих условиях, показывается, что для любых фиксированных $p > 0$ и $q > 0$, при $t \to \infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| p_t^\gamma(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right|^p |x|^q dx = \frac{1}{(2\pi t)^{p/2}} \lambda_\gamma^{(p,q)} + O\left(\frac{1}{t^{\frac{p+1}{2}}} \right);$$

здесь $\lambda_\gamma^{(p,q)}$ — постоянная, зависящая от указанных параметров, а также от некоторых постоянных, определяющих процесс.

Частный случай этого соотношения (при $p = 1$ и $q = 0$) эквивалентен следующему

$$\sup_\varepsilon \left| F_t^\gamma(\varepsilon) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\varepsilon e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| = \frac{\lambda_\gamma}{2\sqrt{2\pi t}} + O\left(\frac{1}{t} \right),$$

λ_γ — величина, определяемая исходными данными.

Пинскер М. С., Понятие регулярности случайных процессов (Pinsker M. S., The Concept of the Regularity of Stochastic Processes).

Если при любых разбиениях $\{E_i(t)\}$, удовлетворяющих указанным условиям, и при любом допустимом $h > 0$ стационарные случайные процессы $\beta^{(h)} = \{\beta^{(h)}(n)\} = \{\beta(nh)\}$ дискретного аргумента n окажутся квази-регулярными, то процесс $\xi = \{\xi(t)\}$ называется слабо регулярным, если же $\beta^{(h)}$ квази-сингулярны, то процесс $\xi = \{\xi(t)\}$ называется сингулярным.

Имеют место следующие утверждения:

1. Если процесс $\xi = \{\xi(t)\}$ квази-регулярен, то он и слабо-регулярен, если процесс ξ сингулярен, то он и квази-сингулярен.

2. Если процесс $\xi = \{\xi(t)\}$ слабо-регулярен или сингулярен, то и процесс $\eta = \{\eta(t)\} = \{\xi(-t)\}$ соответственно слабо-регулярен или сингулярен.

3. Если процесс $\eta = \{\eta(t)\}$ стационарно связан с $\xi = \{\xi(t)\}$ и случайная величина-процесс η является измеримой функцией случайной величины-процесса ξ, то из слабой регулярности или сингулярности процесса ξ следует соответственно слабая регулярность или сингулярность процесса η.

4. Если процесс $\xi = \{\xi(t)\}$ слабо-регулярен, а $\eta = \{\eta(t)\}$ сингулярен, то случайные величины первого процесса ξ и η независимы.

5. а) Любая совокупность стационарно связанных сингулярных процессов образует сингулярный процесс;

б) Обозначим $(E^{(h)}s_{e^{(h)}})$, $(E^{(n)}(n), s_{e^{(h)}(n)})$ пространство значений случайных величин $\beta^{(h)}$, $\beta^{(h)}(n)$ и $\overline{s}_{e^{(h)}} = \bigcap_{-\infty<k<\infty} s^T_{e^{(h)}}$.

Пусть $\xi = \{\xi(t)\}$ стационарный случайный процесс; (X, S_x), $(x(t), S_x(t))$ — соответственно измеримые пространства значений случайных величин ξ, $\xi(t)$.

Здесь $X = \underset{-\infty>t<\infty}{\times} x(t)$, $S_x = \underset{-\infty<t<\infty}{\times} S_{x(t)}$, S_x, $S_{x(t)}$ — соответственно σ-алгебры подмножеств множеств x, $x(t)$, причем S_x есть минимальная σ-алгебра подмножеств x, содержащая множества вида

$$M = \underset{-\infty<t<\infty}{\times} M(t),$$

где $M(t) \in S_{x(t)}$, а в этом представлении $M(t)$ только при конечном числе значений t отлично от $x(t)$. Обозначим S^t_x σ-подалгебру σ-алгебры S_x, порожденную множествами вида $M = \underset{-\infty>t<\infty}{\times} M(t)$, для которых $M(t)$ могут быть отличны от $x(t)$ только при $t \leqslant T$.

Следуя А. Н. Колмогорову, процесс $\xi = \{\xi(t)\}$ назовем квази-регулярным, если для любого множества $F \in \overline{S}_x = \bigcap_{-\infty<T<\infty} S^T_x$ вероятность $\mathbf{P}\{\xi \in F\}$ равна нулю или единице и квази-сингулярным, если σ-алгебра $\overline{S}_x$ всюду плотна в S_x относительно метрики

$$\rho(M, F) = \mathbf{P}\{\xi \in (M \setminus F)(F \setminus M)\}.$$

Возьмем конечные разбиения $\{E_l(t)\}$ пространств $x(t)$ такие, что $E_l(t) = E_l(0)$, и введем в рассмотрение случайные процессы $\beta = \{\beta(t)\}$ с конечным числом состояний, обозначая $\beta(t)$ случайные величины, принимающие значения в пространствах $(E(t), S_{e(t)})$, точками которых являются множества $E_i(t)$, σ-алгебры $S_{e(t)}$ измеримых множеств, состоящих из всех подмножеств пространств $E(t)$, причем $\beta(t) = E_i(t)$, если $\xi(t) = E_i(t)$.

Пусть $\overline{S}_{x,e^{(h)}}$ — подалгебра, состоящая из прообразов множеств σ-алгебры $\overline{S}_{e^{(h)}}$ (при функциональном соответствии переводящими случайную величину ξ в случайную величину $\beta^{(h)}$) и, наконец, S_x наименьшая σ-алгебра, содержащая все $S_{xe^{(h)}}$ при любых разбиениях и любом допустимом $h > 0$.

Тогда при любом разбиении $\{E'_j\}$ множества x с элементами из $E'_j \in S_x$ стационарный процесс $\beta' = \{\beta'(t)\}$ сингулярен. Здесь $\beta'(t)$ — случайные величины, значениями которых являются множества $E'_{jt} = \cup_t E'$, причем $\beta'(t) = E'_{jt}$, если $\xi \in E'_{jt}$, $\cup_t$ образуют группу унитарных операторов, соответствующих стационарному процессу ξ.

Примеры 1. Гауссовские одномерные или многомерные случайные процессы с лебеговым спектром, в частности, с ограниченным лебеговым спектром слабо-регулярны.

2. Стационарные случайные процессы с сингулярным спектром сингулярны.

Заседание 14 апреля.

Сарманов О. В., Захаров В. К., Матрицы, безразличные к арифметизации, и количество информации между двумя вероятностными схемами (Sarmanov, O. V., and Zaharov V. K., Matrixes Which Are Not Influenced by Arithmetization and the Amount of Information between Two Probability Schemes).

Содержание доклада опубликовано в ДАН СССР, том 128, № 2.

Чистяков В. П., Две предельные теоремы для ветвящихся процессов с n типами частиц (Chistyakov V. P., Two Limit Therems for Branching Processes with n Types of Particles).

Рассмотрим ветвящийся процесс с n типами частиц $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (время непрерывно). Пусть $\mathbf{P}_k^{(\alpha)}(t) = \mathbf{P}\{\mu_{kl}(t) + d_l\}$, $i = 1, \ldots, n$, где μ_{kl} — число частиц типа T_l, полученных за время t из одной частицы типа T_k, и $f_k(x) = f_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\alpha} p_k^{\alpha} \cdot x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, где $p_k^{(\alpha)}$ — определяются соотношениями

$$p_k^{\alpha}(t) = \begin{cases} 1 + p_k^{(\alpha)} t + o(t), \text{ если } \alpha_l = 0,\ l \neq k \text{ и } \alpha_k = 1, \\ p_k^{(\alpha)}(t) + o(t) \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $a_{kj} = \left.\dfrac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}\right|_{x=1}$ и $b_{ij}^{(k)} = \left.\dfrac{\partial^2 f_k(x)}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{x=1}$, и пусть λ — характеристическое число матрицы $a = \| a_{kj} \|$ с максимальной действительной частью.

Известные предельные теоремы А. Н. Колмогорова, А. М. Яглома, Б. А. Севастьянова (см. [1], [2], [3]) обобщаются на процессы с n типами частиц.

М. Иржина и Harris получили предельные теоремы для процессов с n типами частиц в предположении, что типы образуют один класс (классификация типов проводится в [3]). Иржина в работе [5] рассматривал процессы с $\lambda < 0$, Harris в [4] — процессы с дискретным временем в случае аналогичном $\lambda > 0$.

В промежуточном случае верна

Теорема 1. *Если:*

1) *процесс состоит из одного класса,*

2) $\lambda = 0$; *хотя бы одно* $b_{ij}^{(k)} > 0$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$

и 3) $\dfrac{\partial^3 f_k(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x}$ *ограничены в точке* $x_k = 1$ $(k = 1, \ldots, n)$, *то при* $t \to \infty$

1*. $$Q_k(t) \sim \frac{2\nu_k}{bt}, \tag{1}$$

где

$$Q_k(t) = 1 - P_k^{(0,\ldots,0)}(t),\ b = \sum_{j,k,l} b_{jk}^{(l)} \mu_j \mu_k \nu_l,\ \text{а } \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

и $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ *собственные векторы характеристического числа* λ *матриц* a *и* a' *соответственно,*

2. *Распределения*

$$\mathbf{P}\left\{ \frac{Q_k(t)\mu_{kl}(t)}{\mathbf{M}\mu_{kl}(t)} < y_l,\ i = 1, \ldots, n \,\middle|\, \sum_l \mu_{kl} > 0 \right\}$$

сходятся к распределению, характеристическая функция которого

$$\psi_k(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \frac{1}{1 - i(\tau_1 + \ldots + \tau_n)}.$$

---

* Формула (1) получена также Савиным.

Для процессов с типами, распадающимися на несколько классов, в случае $\lambda < 0$ предельная теорема приводится в [6]. Если $\lambda > 0$, то можно получить такую теорему:

Теорема 2. *Если* $\lambda > 0$ *и* $b_{ij}^{(k)}$ *конечны, то*

1. $\xi_{kj}(t) = \mu_{kj}(t)\, t^{-m} e^{-\lambda t}$ *сходятся в среднем при* $t \to \infty$ *к некоторой случайной величине* ξ_{kj} (T_k — *входит в класс с наибольшим рангом,* m — *определяется по виду матрицы* a).

2. *Существует случайная величина* ξ_k *такая, что*

$$\mathbf{P}\{\xi_{kj} = \nu_j \xi_k\} = 1.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Изв. НИИ матем. и мех. Томского Гос. Унив.; **2**, 1 (1938).
[2] А. М. Яглом, ДАН СССР, **56**, 8 (1947).
[3] Б. А. Севастьянов, УМН, **VI**, 6 (1951).
[4] T. E. Harris, Proceedings of the Second Berkelly Symposium, 1951.
[5] М. Иржина, Чехосл. матем. журнал, **7** (82), 1 (1957).
[6] В. П. Чистяков, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 1 (1959), 109—113.

Заседание 28 апреля.

Боровков А. А., Предельные теоремы о распределении максимума сумм решетчатых ограниченных случайных величин (Borovkov A. A., Limit Theorems on the Distribution of the Maximum of Sums of Lattice-type Bounded Random Variables).

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые, одинаково распределенные, ограниченные случайные величины, могущие принимать только целочисленные значения. Обозначим:

$$s_0 = 0, \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k, \quad \bar{s}_n = \max_{0 \leqslant \nu \leqslant n} s_\nu$$

и m — максимальное возможное значение ξ_k.

Изучается асимптотическое при $n \to \infty$ поведение вероятностей

$$\mathbf{P}(\bar{s}_n < x) \text{ и } u_{x,n} = \mathbf{P}(\bar{s}_{n-1} < x,\ s_n \geqslant x),$$

где x может расти вместе с n с любой скоростью, ограниченной лишь условиями $0 < x < mn$.

Метод исследования состоит в установлении свойств решений конечно-разностных уравнений вида

$$u_x(z) - u_z = z \sum_{k}^{m} p_k u_{x-k}(z), \quad x > 0, \quad p_k \geqslant 0$$

с граничными условиями, заданными в полосе

$$0 \geqslant x \geqslant -m + 1,$$

и интегрировании формул обращения с помощью приемов седловой точки.

Указанный метод иллюстрируется на вычислении вероятности $u_{x,n}$ в наиболее простом случае, когда $x \sim an$, $0 < a < m$.

Пусть $\lambda(\alpha)$ — точка полупрямой $\lambda > 0$, в которой достигается минимум производящей функции скачка $\xi_k - \alpha$, и ω_α — величина этого скачка. Тогда верна

Теорема

$$u_{x,n} = c(x, n)\, \frac{\lambda^{an-x}(\alpha)\, \omega_\alpha^n e^{nG\left(\frac{x}{n} - \alpha\right)}}{\sqrt{n}} \left(1 + O\left(\frac{x}{n} - a\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Здесь $G(t)$ при достаточно малом $|t|$ разлагается в ряд по степеням t, начинающийся с квадратичного члена. $C(x, n)$ — равномерно ограниченная, периодическая по x и n функция. Найдены явный вид функции $C(x, n)$ и первые члены разложения $G(t)$. Функция $C(x, n)$ и

коэффициент асимптотического разложения, имеющего здесь место, могут быть представлены как функции предельного условного распределения вероятностей величины первого скачка через x ($\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(s_n - x = y \mid s_{n-1} < x,\ s_n \geqslant x)$) и соответствующего числа первых моментов ξ_k.

Результаты для вероятностей $\mathbf{P}(\overline{s}_n < x)$ и $u_{x,n}$ получены для всего „спектра" уклонений x.

Заседание 5 мая.

Филиппова А. А., Теорема Мизеса и ее применения (Filippova A. A. Mises's Theorem and its Applications).

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F(x)$ и пусть $F_n^*(x)$ — эмпирическая функция распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Изучаются предельные свойства при $n \to \infty$ функционалов $T(F_n^*)$ от эмпирической функции распределения F_n^*. Следуя Мизесу, вводится понятие дифференцируемости функционала T, затем дается определение мизесовского и асимптотически мизесовского функционала. Оказывается, что для асимптотически мизесовского функционала T предельное распределение величины $T(F_n^*)$ совпадает с предельным распределением первой отличной от 0 производной функционала T в точке $F(x)$ при соответствующей нормировке (теорема Мизеса). Основной результат состоит в установлении асимптотической мизесовости некоторого класса функционалов, включающего в себя, по-видимому, все дифференцируемые функционалы, с которыми имеет дело математическая статистика. Далее устанавливается, что предельное распределение производной порядка n дифференцируемого функционала T совпадает с распределением m-кратного стохастического интеграла некоторой функции по условному винеровскому процессу. Характеристическая функция двойного стохастического интеграла может быть вычислена. Изложенная теория применяется к конкретным функционалам, возникающим в задачах математической статистики.

Тутубалин В. Н., Изотропные случайные поля и инвариантные марковские процессы (Tutubalin V. N., Random Isotropic Fields and Invariant Markov Processes).

1. Изотропные поля на сфере

А. Изотропное случайное поле ξ (в смысле Ито [1], [2]), считается заданным над пространством K бесконечно-дифференцируемых функций на сфере. Имеет место следующая формула, называемая спектральным разложением поля:

$$\xi(\varphi) = \sum_{\substack{m=0 \\ |l|\leqslant m}}^{\infty} \xi_m^l(\omega) \int \overline{Y_m^l(x)}\, \varphi(x)\, dx,$$

где $\varphi \in K$, Y_m^l — сферические функции, dx — лебегова мера,

$$\mathbf{M}\xi_m^l \overline{\xi_{m_1}^{l_1}} = a_m \delta_l^{l_1} \delta_m^{m_1}$$

(δ_i^j — символ Кронекера, $\mathbf{M}$ — математическое ожидание), последовательность u_m медленно возрастает, т. е. существуют $C > 0$ и $K > 0$ такие, что $a_m = \mathbf{M}|\xi_m^l|^2 \leqslant C(1+m)^k$.

Б. Случайная мера $\mu(A, \omega)$, $\omega \in \Omega$ (Ω — вероятностное пространство), заданная на алгебре $\mathfrak{B} = \{A\}$ сферических многоугольников, называется инвариантной, если $M_\mu(gA)\,\overline{\mu(gB)} = \mathbf{M}_\mu(A)\,\overline{\mu(B)}$, $A, B \in \mathfrak{B}$, g — вращение сферы. Мера μ называется σ-аддитивной, если

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

где ряд сходится в среднем, $A_n \in \mathfrak{B}$, A_n не пересекаются и $\bigcup A_n \in \mathfrak{B}$. Если μ — инва-

риантная σ-аддитивная мера, то $\sup_{A \in \mathfrak{B}} \mathbf{M} |\mu(A)^2| < \infty$. Это свойство позволяет определить интеграл $\xi(f) = \int f(x)\mu(dx)$ для $f \in K$, который является изотропным случайным полем. При этом оказывается, что коэффициенты ξ_m^l спектрального разложения ξ ограничены по норме: $\mathbf{M}|\xi_m^l|^2 < c < \infty$, так что поле $\xi(f)$ распространяется на любые суммируемые с квадратом функции на сфере. Если положить $\nu(A) = \xi(I_A)$, где I_A — индикатор измеримого по Лебегу множества A, то $\nu(A) = \mu(A)$ с вероятностью 1 при $A \in \mathfrak{B}$, т. е. мера ν является продолжением μ на измеримые по Лебегу множества.

2. Инвариантные марковские процессы

Марковский процесс на однородном пространстве $M = G/H$ (G — группа, H — подгруппа) называется инвариантным, если $\mathbf{P}_s^+(x, A) = \mathbf{P}_s^+(g, x, g, A)$, $g \in G$. Рассматриваются инвариантные процессы на сфере и в пространстве Лобачевского. Характеристической функцией меры $\mathbf{P}_s^t(0, A)$ называется функция

$$f_s^t(\rho) = \int \mathbf{P}_s^t(0, dx)\varphi(\rho, x),$$

где $\varphi(\rho, x)$ — ограниченная зональная сферическая функция, зависящая от параметра ρ. Доказывается, что для стохастически инвариантного процесса

$$f_s^t(\rho) = \exp\left[-\sigma_s^+ \Delta\varphi(\rho, 0)\right] - \int_{M-\{0\}} [(1-\varphi(\rho, x))] F_s^t(dx),$$

где 0 — смежный класс единицы группы, Δ — оператор Лапласа, $\sigma_s^t \geqslant 0$, F_s^t — неотрицательная мера такая, что $F_s^t(A) = F_s^t(h, A)$, $h \in H$ и $\int_{u(0)} r^2(0, x) F_s^t(dx) < \infty$ (r — риманово расстояние, $u(0)$ — окрестность 0).

Траектории стохастически непрерывного процесса не имеют разрывов второго рода. Мера F_s^t «кольца» $\{x, \lambda < r(0, x) < \lambda_2\}$ равна математическому ожиданию числа скачков траектории, величина которых (в смысле риманова расстояния) заключена между λ_1 и λ_2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Ито, Стационарные случайные распределения, Математика (сб. пер.), 1 : 3 (1957).
[2] K. Ito, Isotropic random current, Proc. 3-rd Berkeley Symp., vol. II (1956), 125—132.
[3] А. М. Обухов, Статистически однородные поля на сфере, УМН, 2: 2(18) (1947), 196—198.

Заседание 12 мая.

Винклер В., Условия непрерывности выборочных функций случайных полей (Vinkler V., The Continuity Conditions for Sampling Functions of Stochastic Fields).

Обобщается теорема А. Н. Колмогорова о непрерывности выборочных функций случайного процесса (см. Дуб. «Вероятностные процессы», прилож. переводчиков, ИЛ, Москва, 1956) на случай случайных полей. Для случайных полей имеет место

Теорема. *Пусть* $\{\xi(t), t \in E\}$, *где* $E = \{(t_1, \ldots, t_n)\ 0 \leqslant t_\nu \leqslant 1,\ \nu = 1, 2, \ldots, n\} \subseteq R^n$ *сепарабельное случайное поле. Если при некоторых* $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$ *и* $0 < c < +\infty$ *имеет место неравенство*

$$\mathbf{M}\{|\xi(t) - \xi(t + \Delta t)|^\alpha\} \leqslant c\|\Delta t\|^{k+\varepsilon},$$

то почти все выборочные функции случайного поля $\xi(t)$ *являются непрерывными.*

Известны примеры непрерывных случайных полей $\xi(t)$, удовлетворяющие неравенству

$$\mathbf{M}\{|\xi(t) - \xi(t + \Delta t)|^\alpha\} \leqslant c\|\Delta t\|^n$$

при $\alpha > n$, показывающие, что в условии теоремы нельзя положить $\varepsilon = 0$.

Писаренко В. Ф. Об абсолютной непрерывности мер, соответствующих гауссовским процессам с рациональной спектральной плотностью (Pisarenko V. F. On Absolute Continuity of Measures Corresponding to Gaussian Processes with a Rational Spectral Density).

Известно, что каждому действительному случайному процессу соответствует мера μ, определенная на минимальном борелевском теле $\mathfrak{B}$ подмножеств пространства Ω действительных функций, содержащем все цилиндрические множества (см. [1]). Для любых двух гауссовских процессов возможны только два крайних случая: или взаимная абсолютная непрерывность соответствующих мер, или же случай, когда меры полностью сосредоточены на разных подмножествах пространства Ω (см. [2], [3]).

Для процессов, рассматриваемых на конечном интервале времени, доказывается следующая

Теорема. *Необходимым и достаточным условием для абсолютной непрерывности мер, соответствующих гауссовским стационарным процессам с рациональными спектральными плотностями* $\varphi_1(\lambda)$ *и* $\varphi_2(\lambda)$, *является условие*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\varphi_1(\lambda)}{\varphi_2(\lambda)}=3.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, Основные понятия теории вероятностей, М.—Л., 1936.
[2] U. Grenander, Stochastic processes and statistical inference, Arkiv för Math., **1**, 17 (1950), 195—277.
[3] Я. Гаек, Об одном свойстве нормальных распределений произвольного стохастического процесса, Чехосл. мат. ж., 8 (83), 4 (1958), 610—618.

Прекопа А. (Венгрия). **Стохастические функции множеств** (A. Prékopa (Hungary), On a Stochastic Set Function)*.

Пусть H — абстрактное пространство и R — кольцо подмножеств H. Если каждому множеству $A\in R$ соответствует случайная величина $\xi(A)$ так, что для каждой последовательности $A_1, \ldots, A_2, \ldots$ попарно непересекающихся множеств из R случайные величины $\xi(A_1)$, $\xi(A_2), \ldots$ независимы и $\mathbf{P}\left(\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi(A_k)=1$, если только $\sum_{k=1}^{\infty}A_k\in R$, то $\xi(\cdot)$ будет называться стохастической вполне аддитивной (или короче—вполне аддитивной) функцией множества. Примерами являются пространственное распределение звезд или коллоидных частиц, распределение на плоскости количества осадков или урожая. Первая задача — расширение вполне аддитивной функции множества, заданной на кольце R, на наименьшее σ-кольцо $\mathfrak{B}(R)$, содержащее R. Можно дать условия, при которых расширение возможно. Эти условия частично сходны с условиями, обеспечивающими сходимость с вероятностью 1 (независимо от порядка суммирования) ряда из независимых случайных величин. Процесс расширения проводится при помощи трансфинитной индукции, потому что представление $\xi=\xi^+-\xi^-$, вообще говоря, не существует. Следует отметить, что выборочные функции $\xi(A,\omega)$, вообще говоря, не являются вполне аддитивными функциями множества. Если $\xi(\cdot)$ определена на σ-кольце $\mathfrak{B}$ и вполне аддитивна, то интеграл по множеству A действительной измеримой функции $\varphi(h)$ $(h\in H)$ определяется следующим образом: если $\{y_k^m\}$ — последовательность, обладающая тем свойством, что $y_k^{(m)}\leqslant y_{k+1}^{(m)}$, $\sup_k(y_{k+1}^{(m)}-y_k^{(m)})\to 0$ при $m\to\infty$, и ряд

$$\zeta_m=\sum_{k=-\infty}^{\infty}y_k^{(m)}\,\xi(AH_k^{(m)}),\quad H_k^{(m)}=\{h: y_k^{(m)}\leqslant\varphi(h)<y_{k+1}^{(m)}\}$$

* Доклад прочитан на заседании семинара 14 октября 1958 г.

сходится с вероятностью 1 независимо от порядка суммирования, то можно доказать, что ζ_m сходится по вероятности к пределу. В этом случае $\varphi(h)$ называется условно интегрируемой на A. Функция $\varphi(h)$ называется интегрируемой на A, если $\varphi(h)$ условно интегрируема на каждом измеримом подмножестве множества A. Мы обозначим в этом случае стохастический предел ζ_m через $\int_A \varphi(h)\, d\xi$. Этот интеграл является обобщением интеграла Радона и имеет аналогичные свойства. Только в теоремах сходимости обычная сходимость заменяется сходимостью по вероятности. Этот интеграл обобщается на случай, когда вместо действительной функции мы рассматриваем семейство случайных величин $\xi(h)$ $(h \in H)$.

В определении интеграла $\int_A \xi(h)\, d\xi$ предполагается, что семейства случайных величин $\{\xi(h), h \in H\}$, $\{\xi(A), A \in \mathcal{B}\}$ независимы. Такие интегралы полезны в теории вторичных процессов. Анализируются свойства выборочных функций и распределения вероятностей случайных величин $\xi(A)$.

Если мы предположим, что выборочные функции вполне аддитивной стохастической функции множества вполне аддитивны, то при естественных условиях на H и $\mathcal{B}$ можно доказать, что почти все выборочные функции чисто разрывны. Если $\xi(A)$ $(A \in \mathcal{F})$ не атомическая, т. е. для каждого $A \in \mathcal{B}$, для которого $\mathbf{P}(\xi(A) \neq 0) > 0$, можно найти два непересекающихся измеримых подмножества A_1 и A_2 множества A такие, что $\mathbf{P}(\xi(A_1) \neq 0) > 0$ и $\mathbf{P}(\xi(A_2) \neq 0) > 0$, то случайные величины $\xi(A)$ имеют безгранично-делимые распределения и справедлива формула Леви-Хинчина.

Нерешенная задача: пусть $\xi(A)$ $(A \in \mathcal{B})$ вполне аддитивна, где $\mathcal{B}$ есть σ-кольцо, а A_m — последовательность множеств из $\mathcal{B}$ таких, что $\lim_{m\to\infty} A_m = 0$. Справедливо или нет, что

$$\mathbf{P}(\xi(A_m) \to 0) = 1?$$

Иржина М. (Чехословакия). **Ветвящиеся случайные процессы с непрерывным пространством состояний** (M. Jiřina (Československo), Stochastic Branching Processes with a Continuous Space of States)*.

1. Определение и общие свойства. В докладе изучаются некоторые свойства марковских ветвящихся процессов с полупрямой $[0, \infty)$ в качестве пространства состояний. Используемые обозначения:

$E = [0, \infty)$ — пространство состояний;

$\mathcal{E}$ — σ-алгебра всех борелевских множеств в E;

T — некоторое подмножество множества $[0, \infty)$ значений временного параметра такое, что $0 \in T$;

$P(s, a; t, A)$ — вероятность, что процесс находится в момент t в множестве A, при условии, что в момент s он находился в точке a.

Предполагается, что функция $P(s, a; t, A)$ определена для всех $s, t \in T$, $s \leqslant t$, $a \in E$, $A \in \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$-измерима относительно a, является вероятностной мерой на $\mathcal{E}$ относительно A, что $P(t, a; t, A)$ равна 1 для $a \in A$ и 0 для $a \overline{\in} A$, и что имеют место следующие два отношения:

$$P(t_1, a; t_3, A) = \int_E P(t_2, b; t_3, A)\, P(t_1, a; t_2, db), \quad t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3, \tag{1.1}$$

$$P(s, a_1 + a_2; t, A) = \iint_{\{b_1+b_2 \in A\}} P(s_1, a_1; t, db_1)\, P(s, a_2; t, db_2). \tag{1.2}$$

Из требования (1.2) вытекает, что все вероятности перехода безгранично делимы.

Для $0 \leqslant x \leqslant 1$ можно определить производящую функцию $F(s, a; t; x)$ соотношением

$$F(s, a; t, x) = \int_E x^b\, P(s, a; t, db).$$

* Доклад прочитан на заседании семинара 28 октября 1958 г.

Если положить $F(s, t, x) = F(s, 1; t, x)$, то получим

$$F(s, a; t, x) = [F(s, t, x)]^a, \tag{1.3}$$

$$F(t_1, t_3, x) = F(t_1, t_2; F(t_2, t_3, x)). \tag{1.4}$$

Для всякого комплексного x с $\mathrm{Re}\, x \leqslant 0$ можно определить преобразование Лапласа $\Phi(s, a; t, x)$ соотношением

$$\Phi(s, a; t, x) = \int_E e^{xb} P(s, a; t, db).$$

Если $\Psi(s, t, x)$ — главная ветвь логарифма функции $\Phi(s, 1; t, x)$, то

$$\Phi(s, a; t, x) = e^{a\Psi(s, t, x)}, \tag{1.5}$$

$$\Psi(t_1, t_3, x) = \Psi(t_1, t_2, \Psi(t_2, t_3, x)), \quad t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3. \tag{1.6}$$

2. Случай дискретного времени, т. е. $T = \{0, 1, 2 \ldots\}$.

Теорема (существования). *Для произвольной последовательности безгранично делимых вероятностных мер* $\mathbf{P}^{(t)}(A)$ *на* $\mathcal{E}$ $(t = 1, 2, \ldots)$ *существует точно один ветвящийся случайный процесс* $P(s, a, t, A)$ *такой, что* $P(t, 1; t+1, A) = \mathbf{P}^{(t)}(A)$.

Из этой теоремы и (1.6) вытекает

Следствие. *Если* $\psi_1(x)$ *и* $\psi_2(x)$ *— логарифмы преобразования Лапласа двух безгранично делимых законов распределения на* $\mathcal{E}$, *то сложная функция* $\psi_2(\psi_1(x))$ *есть тоже логарифм преобразования Лапласа некоторого третьего безгранично делимого закона распределения на* $\mathcal{E}$.

Предположим теперь, что процесс однороден и будем пользоваться сокращенной записью $\mathbf{P}(A)$ вместо $P(0, 1; 1, A)$ и $F(x)$ вместо $F(0, 1; 1, x)$. Первый момент $\int_E b\mathbf{P}(db)$ обозначим через M. Пусть $\xi(t)$ обозначает состояние, в котором процесс находится в момент t. Скажем, что процесс вырождается

a) стационарно, если почти все ξ равны 0, начиная с некоторого t;

b) сильно, если $\xi(t) \to 0$ с вероятностью 1;

c) слабо, если $\xi(t) \to 0$ по вероятности.

Во всех трех случаях при любом начальном распределении вероятностей имеет место утверждение:

Процесс вырождается стационарно тогда и только тогда, когда уравнение $F(x) = x$ *имеет в интервале* $[0,1]$ *точно одно решение* $x = 1$. Следующие три утверждения равносильны:

a) *процесс вырождается слабо;*

b) *процесс вырождается сильно;*

c) $M \leqslant 1$ *и* $\mathbf{P}(\{1\}) \neq 1$.

Всю теорию можно построить для n-мерного случая, т. е. для $E = [0, \infty) \times \ldots \times [0, \infty)$ (n раз). Для слабой сходимости имеют место необходимые и достаточные условия Севастьянова, если несколько изменить определение финального класса.

3. Случай непрерывного времени $T = [0, \infty)$. Предполагается, что для всякого s, a, A существует конечный предел

$$\lim_{t \to s^-} \frac{P(t, a; s, A) - \mathbf{P}(s, a; s, A)}{t - s} = \lim_{t \to s^+} \frac{P(s, a; t, A) - \mathbf{P}(s, a; s, A)}{t - s} = p(s, a, A). \tag{3.1}$$

Функции $p(s, a, A)$ (интенсивности перехода) обладают кроме общеизвестных свойств еще следующими двумя свойствами:

$p(s, a, A) = ap(s, 1, A + (1 - a))$, $A + (1 + a)$ — сдвиг множества A, $p(s, 1, [0, 1)) = 0$.

Функцию $p(s, a, A)$ можно построить точно одним образом только при помощи функции $p(s, 1, A)$. Далее, при некоторых условиях регулярности (например, непрерывность относительно s и $\int bp(s, 1, db) < \infty$) можно построить методом Феллера вероятности пере-

хода $P(s, a; t, A)$, которые описывают ветвящийся процесс в нашем смысле и удовлетворяют (3.1).

Теорема (существования). *Пусть* $\psi(s, x) = e^{-x} \int_E e^{xb} p(s, 1, [db])$ $(\mathrm{Re}\, x \leqslant 0)$. *Тогда функции* $\Psi(s, t, x)$ (см. п. 1) *удовлетворяют для всякого* t *и* x *дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial}{\partial s} \Psi(s, t, x) = -\psi(s, \Psi(s, t, x))$$

с начальным условием $\Psi(t, t, x) = x$.

4. Связь с ветвящимися процессами с дискретными состояниями

В качестве следствия теоремы существования предыдущего пункта получается следующее утверждение:

Если в ветвящемся процессе с дискретными состояниями невозможен переход из 1 *в* 0, *то все вероятности перехода этого процесса безгранично делимы.*

Перез А. (Чехословакия), **Некоторые вопросы теории информации** (A Perez (Československo), Some Problems in the Theory of Information) *.

Исходя из результатов, опубликованных в [1], [2], в докладе дано определение одной модели различимости, которая, будучи поставлена в связь с обобщенными понятиями теории информации и, в особенности, с одним обобщенным видом так называемого свойства E [3], позволяет распространить на случай абстрактных вероятностных полей дискретную теорию информации, изложенную, например в [4], [5] и т. д. Это распространение идет еще дальше, чем в [1]; надо только, чтобы имело место обобщенное свойство E. По существу речь идет о случаях, когда имеет место сходимость по вероятности скорости элементарной информации (информационной плотности) к своему математическому ожиданию, т. е. к обобщенной скорости информации. Эта сходимость рассматривается относительно возрастающей системы σ-алгебр, причем соответствующий параметр изображает «время», не обязательно дискретное.

Указанная модель различимости выражает математически ту естественную мысль, что, вообще говоря, между источником информации и «наблюдателем», или «адресатом», всегда действует «несократимость» — неустранимая минимальная причина сшибок, представленная каналом, который неизбежно будет между этим источником и «адресатом» и который можно назвать каналом наблюдения адресата.

Между этим источником информации и этим «наблюдателем» считаются возможными только те каналы, которые образованы «каскадным» соединением произвольного канала с каналом наблюдения адресата.

Таким образом, «идеальным» при данных условиях будет случай, когда между источником информации и «наблюдением» будет только канал наблюдения адресата.

На основе этого понятия и введенного Фейнштейном [6] понятия ε-различимости определяется, в частности, понятие возможности передачи источника информации через канал связи, сначала в узком смысле и затем в асимптотическом (широком) смысле относительно возрастающих систем (не обязательно последовательностей, как это делается в случае дискретного параметра «времени» в [1]) σ-подалгебр из σ-алгебр, входящих в рассмотрение.

Это определение, если его применить к случаю конечных алфавитов и канала наблюдения адресата, эквивалентному каналу непосредственного (безошибочного) наблюдения, сводится к хорошо известному определению возможности передачи, используемому в дискретной теории информации [4].

Все условия справедливости обобщенного вида фундаментальной леммы Фейнштейна (теорема 5 из [1]), а также теорем 6,8 и 10 о возможности передачи можно заменить единственной гипотезой — обобщенным свойством E. Поэтому, работая с источниками информации $(x, \mathfrak{X}, \mu)$, которые вместе с рассматриваемыми каналами $(\mathfrak{X}, \nu_x, \mathfrak{Y})$ порождают двойные источники $(X \times Y, \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}\omega)$, обладающие обобщенным свойством E относительно возрастающих систем $\{\mathfrak{X}_t\}$ и $\{\mathfrak{Y}_t\}$ σ-подалгебр из $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, соответственно, можно непосредственно распространить указанные теоремы на этот случай.

* Доклад прочитан на заседании семинара 9 декабря 1958 г.

Отсюда сразу же вытекает желательность максимально возможного расширения множества известных случаев, для которых имеет место обобщенное свойство E или какое-либо аналогичное свойство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Pěrez, Sur la théorie de l'information dans le cas d'un alphabet abstrait, 1957, 209—243.

[2] А. Перез, Теория информации с абстрактным алфавитом. Обобщенные виды предельной теоремы Мак-Милана для случая дискретного и непрерывного времени, Теория вероят. и ее примен., **IV**, 1 (1959), 105—109.

[3] B. Mc. Millan, The Basic Theorems on Information Theory, AMS, 24 (1953), 196—219.

[4] А. Я. Хинчин, Об основных теоремах теории информации, УМН, 11 (1956), 17—75.

[5] J. Nedoma, Capacity of a Discrete Channel, Transactions of the First Prague Conference on Information Theory, Statistical Dicision Functions and Random Processes, 143—181.

[6] A. Feinstein, A New Basic Theorem of Information Theory, Trans. IRE, PGIT, (1954), 2—22.

Исправления к работам В. В. Петрова „Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин" и „Об одном классе предельных теорем для независимых случайных величин" (т. IV, вып. 2.)

В формулировке леммы на стр. 222 ошибочно опущено условие

$$\text{III)} \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>n^{\frac{1}{3}}} |x|^k \, dF_j(x) = o(1) \quad (n \to \infty)$$

Это дополнительное условие, используемое лишь в доказательстве леммы, должно предполагаться выполненным во всех теоремах обеих заметок (во второй из них $k = 3$). В случае одинаковых распределений условие III вытекает из условия I. Оно выполнено также, если выполнено условие I с заменой k на $k + \rho$, где $\rho > 0$. За счет некоторых изменений в формулировке леммы и последующих оценках условие III можно ослабить, заменив в нем область интегрирования $|x| > n^{\frac{1}{3}}$ областью $|x| > n^{\tau}$, где τ — некоторое число из интервала $0 < \tau < \frac{1}{2}$.

В. В. Петров

СОДЕРЖАНИЕ ЧЕТВЕРТОГО ТОМА

Выпуск первый

Дынкин Е. Б. Одномерные непрерывные строго марковские процессы 3
Dynkin E. B. One-Dimensional Continuous Strong Markov Processes 54
Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. II. Достаточные условия 55
Linnik Yu. V. General Theorems of the Factorization of Infinitely Divisible Laws. II 85

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Айвазян С. А. Сравнение оптимальных свойств критериев Неймана — Пирсона и Вальда 86
Aivazian S. A. A Comparison of the Optimal Properties of the Neuman — Pearson and the Wald Sequential Probability Ratio Tests 93
Leo A. Goodman. A Note on Stepancw's Tests for Markov Chains 93
Лео А. Гудман. Замечание к критерию Степанова для марковских цепей 96
D. Vere-Jones and David G. Kendall. A Commutativity Problem in the Theory of Markov Chains 97
Д. Вер-Джонс и Д. Г. Кендалл. Задача перестановочности в теории марковских цепей 100
Коваленко И. Н. Об одном классе оптимальных решающих функций для биномиального семейства распределений 101
Kovalenko I. N. On One Class of Optimal Resolving Functions for a Binomial Family of Distributions 105
Альберт Перез. Теория информации с абстрактным алфавитом 105
Albert Perez. Information Theory with an Abstract Alphabet 109
Чистяков В. П. Обобщение одной теоремы теории ветвящихся случайных процессов 109
Čistyakov V. P. Generalization of a Theorem for Branching Processes 113
Информация о совещании по применению математических методов в биологии . . . 114
Информация о всесоюзном совещании по теории вероятностей и математической статистике 116

Выпуск второй

Севастьянов Б. А. Переходные явления в ветвящихся случайных процессах . . . 121
Sevastjanov B. A. Transient Phenomena in Branching Stochastic Processes . . . 135
Большев Л. Н. О преобразованиях случайных величин 136
Bolshev L. N. On the Transformations of Random Variables 149
Линник Ю. В. Общие теоремы о разложении безгранично делимых законов. III. Достаточные условия 150
Linnik Yu. V. General Theorems on the Factorization of Infinitely Divisible Laws. III 171
Вентцель А. Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов 172
Wentzell A. D. On Lateral Conditions for Multidimensional Diffusion Processes . 185
Волконский В. А. и *Розанов Ю. А.* Некоторые предельные теоремы для случайных функций. I 186
Volkonski V. A. and Rozanov Yu. A. Some Limit Theorems for Random Functions. I 207

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Волконский В. А. Непрерывные одномерные марковские процессы и аддитивные функционалы от них 208

Volkonski V. A. Continuous One-Dimensional Markov Processes and Additive Functionals Derived from Them 211
Прохоров Ю. В. Одна экстремальная задача теории вероятностей 211
Prohorov Yu. V. An Extremal Problem in Probability Theory 214
Прохоров Ю. В. Несколько замечаний к усиленному закону больших чисел 215
Prohorov Yu. V. Some Remarks on the Strong Law of Large Numbers 220
Петров В. В. Асимптотические разложения для распределений сумм независимых случайных величин 220
Petrov V. V. Asymptotic Expansions for Distributions of Sums of Independent Random Variables 224
Петров В. В. Об одном классе предельных теорем для независимых случайных величин 224
Petrov V. V. On a Class of Limit Theorems for Independent Random Variables . 228
Сираждинов С. Х. О точной оценке для локальной теоремы 229
Sirajdinov S. H. On Exact Estimate in a Local Limit Theorem 233
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара кафедры теории вероятностей Московского университета (сентябрь — декабрь 1958 г.) 233
Summary of Papers Presented at the Sessions of the Probability Research Seminar, Moscow University (September — December, 1958) 233

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу Т. В. Андерсон «Введение в многомерный статистический анализ» *Гнеденко Б. В.* 247

Выпуск третий

Абрамов Л. М. Энтропия автоморфизма соленоидальной группы 249
Abramov L. M. The Entropy of an Automorphism of a Solenoidal Group 254
Клосс Б. М. О вероятностных распределениях на бикомпактных топологических группах 255
Kloss B. M. Probability Distributions on Bicompact Topological Groups 290
Розанов Ю. А. Спектральный анализ абстрактных функций 291
Rozanov Yu. A. Spectral Analysis of Abstract Functions 310
Линник Ю. В. Теоретико-информационное доказательство центральной предельной теоремы в условиях Линдеберга 311
Linnik Yu. V. An Information Theoretic Proof of the Central Limit Theorem on Lindeberg Conditions 321
Masani P. and Wiener N. On Bivariate Stationary Processes and the Factorization of Matrix-Valued Functions 322
Мазани П. и Винер Н. О двумерных стационарных процессах и разложении матрично-значных функций 331
Хасьминский Р. З. О положительных решениях уравнения $\mathfrak{A}u + Vu = 0$ 332
Hasminsky R. Z. On Positive Solutions of the Equation $\mathfrak{A}u + Vu = 0$ 341

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Леонов В. П., Ширяев А. Н. К технике вычисления семиинвариантов 341
Leonov V. P. et Shiriaev A. N. Sur le calcul des sémi-invariants 355
Гирсанов И. В. Об одном свойстве невырожденных диффузионных процессов . . . 355
Girssanov I. V. Über eine Eigenschaft des Nicht-Singuliaren Diffusionsprozesses 361
Башарин Г. П. О статистической оценке энтропии последовательности независимых случайных величин 361
Basharin G. P. On a Statistical Estimate for the Entropy of a Sequence of Independent Random Variables 364

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Рецензия на книгу М. Фиш «Теория вероятностей и математическая статистика» (2 издание). *Гнеденко Б. В.* 365

Выпуск четвертый

Королюк В. С. Асимптотический анализ распределений максимальных уклонений в схеме Бернулли 369
Korcljuk V. S. Asymptotical Analysis of Maximum Deviation Distributions in the Bernoulli Scheme 397
Pakshirajan R. P. On the Maximum Partial Sums of Sequences of Independent Random Variables 398
Пакширайан Р. П. О максимальных частичных суммах последовательностей независимых случайных величин 404
Chiang Tse-pei. On the Estimation of Regression Coefficients of a Continuous Parameter Time Series with a Stationary Residual 405
Цзян Цзе-пей. Оценка коэффициентов регрессии в случае непрерывных временных рядов со стационарными остатками 423

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Герценштейн М. Е., Васильев В. Б. Волноводы со случайными неоднородностями и броуновское движение в плоскости Лобачевского 424
Gerzenshtein M. E., Vasiljev V. B. Waveguide with the Random Nonhomogeneities and Brownian Motion on the Lobachevshy's Plane 432
Карпелевич Ф. И., Тутубалин В. Н., Шур М. Г. Предельные теоремы для композиций распределений в плоскости и пространстве Лобачевского 432
Karpelevich F. I., Tutubalin V. N., Shour M. G. Limit Theorems for the Compositions of Distributions in the Lobachevsky's Plane and Space 436
Беляев Ю. К. Аналитические случайные процессы 437
Beljaev Yu. K. Analytical Random Processes 444
Бабкин В. И., Беляев П. Ф., Максимов Ю. И. Некоторые замечания к работе Л. В. Гончарова «Из области комбинаторики» 445
Babkin V. I., Beljaev P. F., Maksimov Yu. I. Some Remarks on Goncharov's Paper «From the Domain of Combinatorics» 450
Виленкин С. Я. Об оценке среднего в стационарных процессах 451
Vilenkin S. Ya. On the Estimation of a Mean in Stationary Processes 453
Ибрагимов И. А., Чернин К. Е. Об одновершинности устойчивых законов 453
Ibragimov I. A., Cernin K. E. On the Unimodality of Stable Laws 456
Романовский И. В. Об одной теореме Р. Белмана 456
Romanovsky I. V. On One Theorem of R. Bellman 458
Ли Хен Вон. К теории оптимальной фильтрации сигнала при наличии внутренних шумов 458
Li Heng Won. On the Theory for Optimal Filtration of a Signal in the Presence of Internal Random Noise 464
Розанов Ю. А. К экстраполяции обобщенных случайных стационарных процессов . 465
Rozanov Yu. A. On Extrapolation of Random Distributions 471
Резюме докладов, сделанных на заседаниях семинара кафедры теории вероятностей Московского университета (февраль — май 1959 г.) 472
Summary of Papers Presented at the Sessions of the Probability Research Seminar, Moscow University (February — May, 1959) 472

ВНИМАНИЮ АВТОРОВ

1. Журнал «Теория вероятностей и ее применения» принимает оригинальные статьи и краткие сообщения по теории вероятностей, общим вопросам математической статистики и применениям теории вероятностей в естествознании и в технике. Статьи по прикладным вопросам принимаются лишь в случае существенной новизны применяемых математических методов.

2. Статьи и краткие сообщения печатаются на русском языке с резюме на английском, немецком или французском языках или на английском, немецком, французском языках с резюме на русском языке.

3. Рукопись представляется в двух экземплярах, напечатанной на машинке через 2 интервала на одной стороне листа с указанием адреса автора.

4. Авторам статей высылаются 50 оттисков.

5. Статьи следует направлять по адресу: Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, кафедра теории вероятностей.

NOTE TO AUTHORS

1. The journal «The Theory of Probability and Its Applications» accepts original articles and communications on the theory of probability, general problems of mathematical statistics and applications of the theory of probability to natural science and technology. Articles of the latter kind will be accepted only if the mathematical methods applied are essentially new.

2. Articles and communications will be published either in Russian with summaries in English, German or French, or in English, German or French with summaries in Russian.

3. All contributions should be sent in two copies, which are typewritten only on one side of the sheet with double spaces.

4. The authors will be sent 50 copies of their articles.

5. Authors are requested to address their contributions: Moscow, B-234, MGU (State University), Department of Mathematics and Mechanics.

Технический редактор *Т. А. Михайлова*

Т-12205 Подписано к печати 27/X-1959 г. Тираж 2075 Зак. 3680
Формат бумаги $70\times108^{1}/_{16}$ Бум. л. $3^{3}/_{4}$ Печ. л. 10,27 Уч.-изд. л. 11,9

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ПР. 2
ПОД. ТО ЦЕНТР. ПОЛИТЕХ.
БИБЛИОТЕКЕ

Цена 11 р. 25 к.

2-26

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА 1960 ГОД НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Названия журналов	Номеров в год	Подписная цена	
		годовая	полугодовая
ОБЩЕАКАДЕМИЧЕСКИЕ ЖУРНАЛЫ			
Вестник Академии наук СССР	12	96	48
Доклады Академии наук СССР (без папок)	36	518—40	259—20
Доклады Академии наук СССР (с 6-ю коленкоровыми папками с тиснением)	36	542—40	271—20
Известия Карельского и Кольского филиалов АН СССР	4	28	14
Известия Сибирского отделения АН СССР	12	84	42
Природа	12	84	42
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ			
Акустический журнал	4	48	24
Астрономический журнал	6	99	49—50
Журнал технической физики	12	126	63
Журнал экспериментальной и теоретической физики	12	288	144
Известия Академии наук СССР, серия геофизическая	12	180	90
Известия Академии наук СССР, серия математическая	6	90	45
Известия Академии наук СССР, серия физическая	12	144	72
Кристаллография	6	90	45
Математический сборник	12	144	72
Оптика и спектроскопия	12	162	81
Приборы и техника эксперимента	6	90	45
Теория вероятностей и ее применения	4	45	22—50
Физика твердого тела	12	150	75
ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ			
Высокомолекулярные соединения	12	150	75
Геохимия	8	72	36
Журнал аналитической химии	6	72	36
Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии	6	45	22—50
Журнал неорганической химии	12	270	135
Журнал общей химии	12	330	165
Журнал прикладной химии	12	225	112—50
Журнал физической химии	12	270	135
Известия Академии наук СССР, Отделение химических наук	12	180	90
Коллоидный журнал	6	72	36
Радиохимия	6	72	36
Успехи химии	12	96	48
ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ			
Автоматика и телемеханика	12	135	67—50
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Металлургия и топливо	6	75	37—50
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Механика и машиностроение	6	75	37—50
Известия Академии наук СССР, Отделение технических наук. Энергетика и автоматика	6	75	37—50
Прикладная математика и механика	6	117	58—50
Радиотехника и электроника	12	165	82—50

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ в пунктах подписки Союзпечати, почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на предприятиях и в учреждениях, в научно-исследовательских институтах и учебных заведениях.

Подписка принимается также магазинами «Академкнига» и конторой «Академкнига» по адресу:

Москва, К-12, Б. Черкасский пер., 2/10.

«АКАДЕМКНИГА»